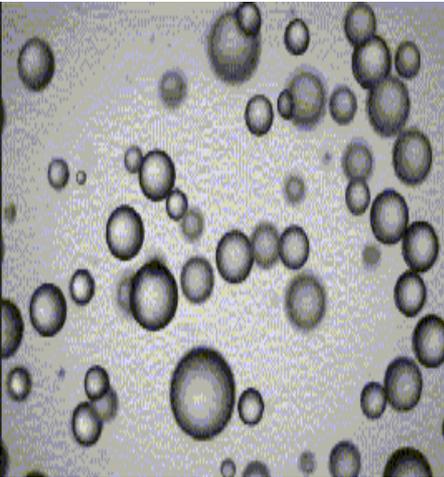


План лекции

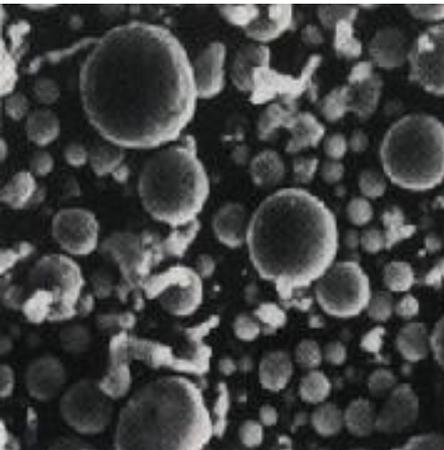
- Летучие в магме. Растворимость, всплытие пузырей.
- Фильтрация газа. Закон Дарси. Дегазация магм
- Моделирование течения многофазных сред. Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Система уравнений, описывающая многофазное, многоскоростное течение.
- Модели взрывных извержений.
- Мельник Олег Эдуардович
oemelnik@gmail.com

Описание дисперсных систем

пузырьки



частицы



Параметры многофазных сред

Приведенная плотность $= \frac{m_i}{\Omega_{mixture}} = \rho_i$

Истинная плотность $= \frac{m_i}{\Omega_i} = \rho_i^0$

Объемная доля $= \frac{\Omega_i}{\Omega_{mixture}} = \alpha_i$

Массовая доля $= \frac{m_i}{m_{mixture}} = X_i$

$$\Omega_{mixture} = \sum \Omega_i; \quad m_{mixture} = \sum m_i$$

Параметры смеси

$$\frac{\sum m_{ij} V_{ij}}{m_i} = V_i$$

Скорость отдельной фазы

$$\frac{\sum \rho_i V_i}{\rho_{mixture}} = V$$

Среднемассовая скорость смеси

$$\rho_{mixture} = \sum \rho_i$$

Уравнения неразрывности

+ Поток массы

Уравнения импульса

+ Силовое взаимодействие

Плотность двухфазной среды

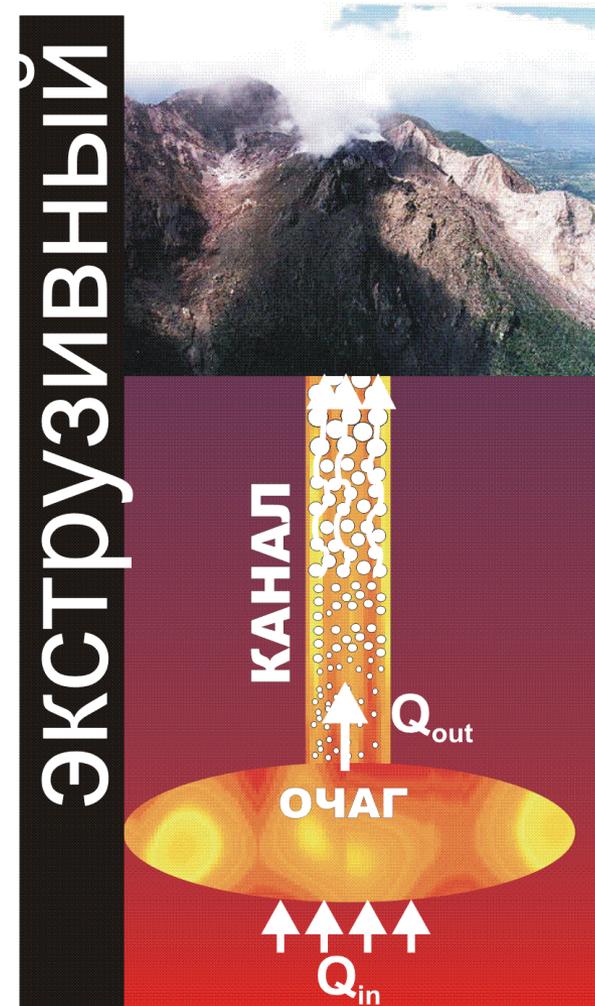
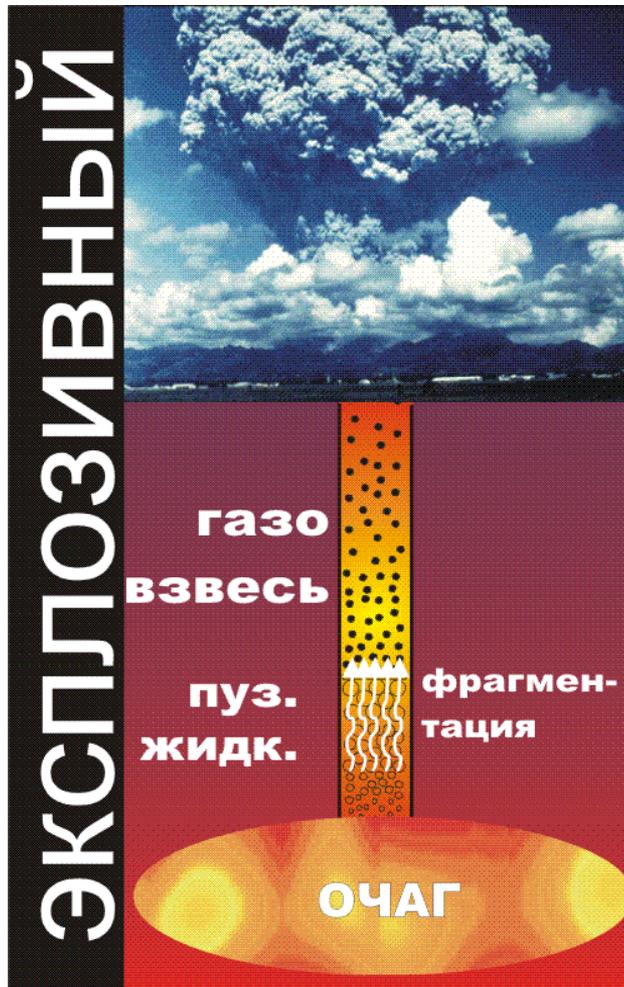
$$\rho = (1 - \alpha) \rho_l^0 + \alpha \rho_g^0$$

Через объемную долю газа

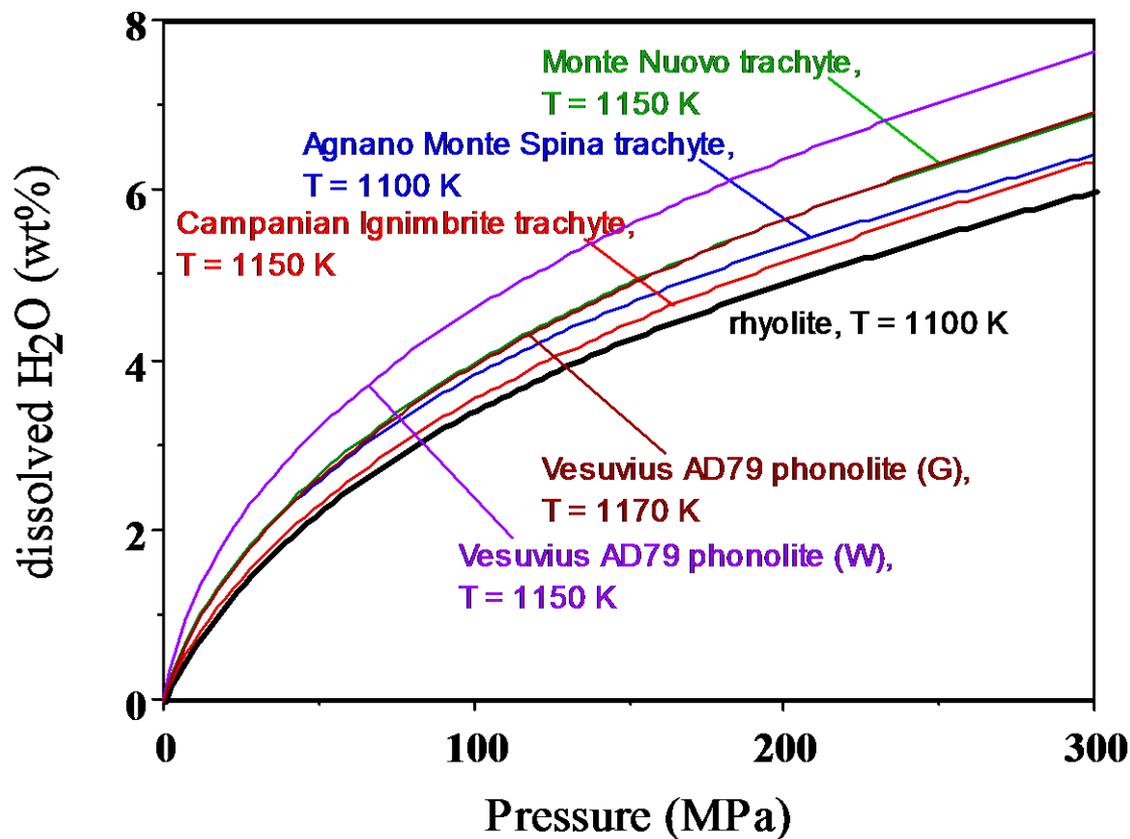
$$\frac{1}{\rho} = \frac{x_g}{\rho_g} + \frac{1 - x_g}{\rho_l}$$

Через массовую долю газа

Летучие в магме



Растворимость воды в силикатных расплавах



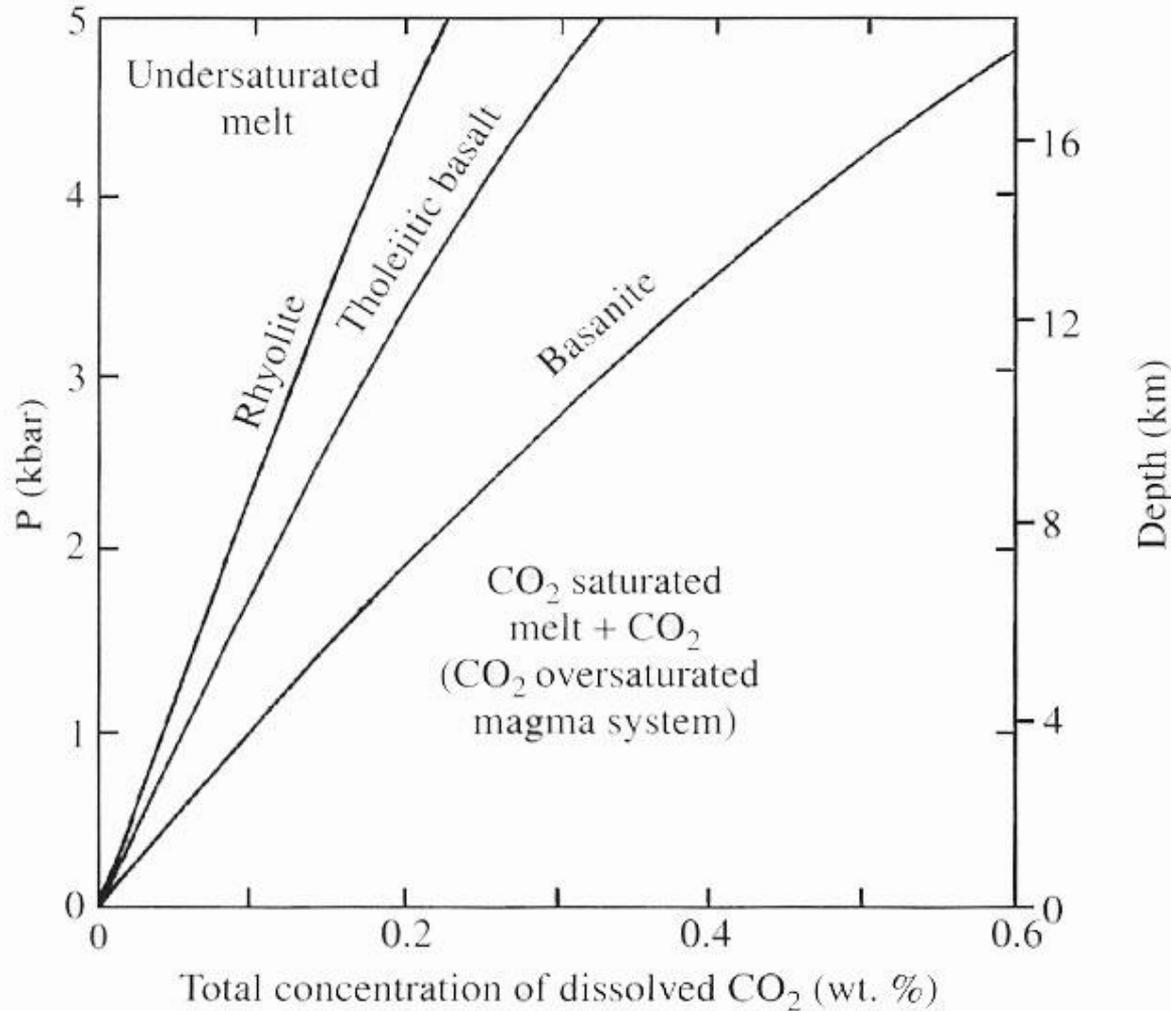
$$C = k\rho^n$$

$$n \sim 0.5,$$

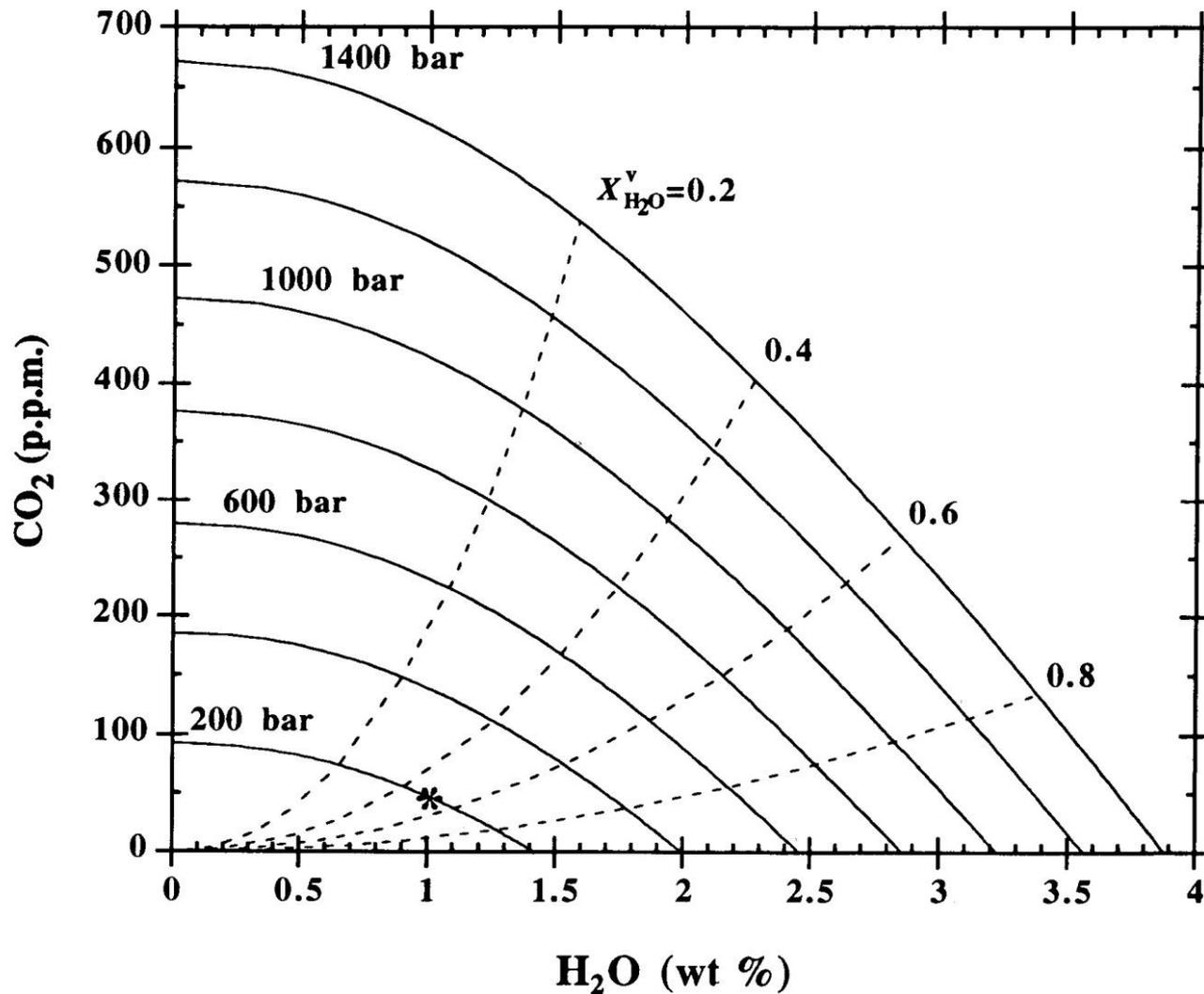
k (состав)

After Papale, 1997

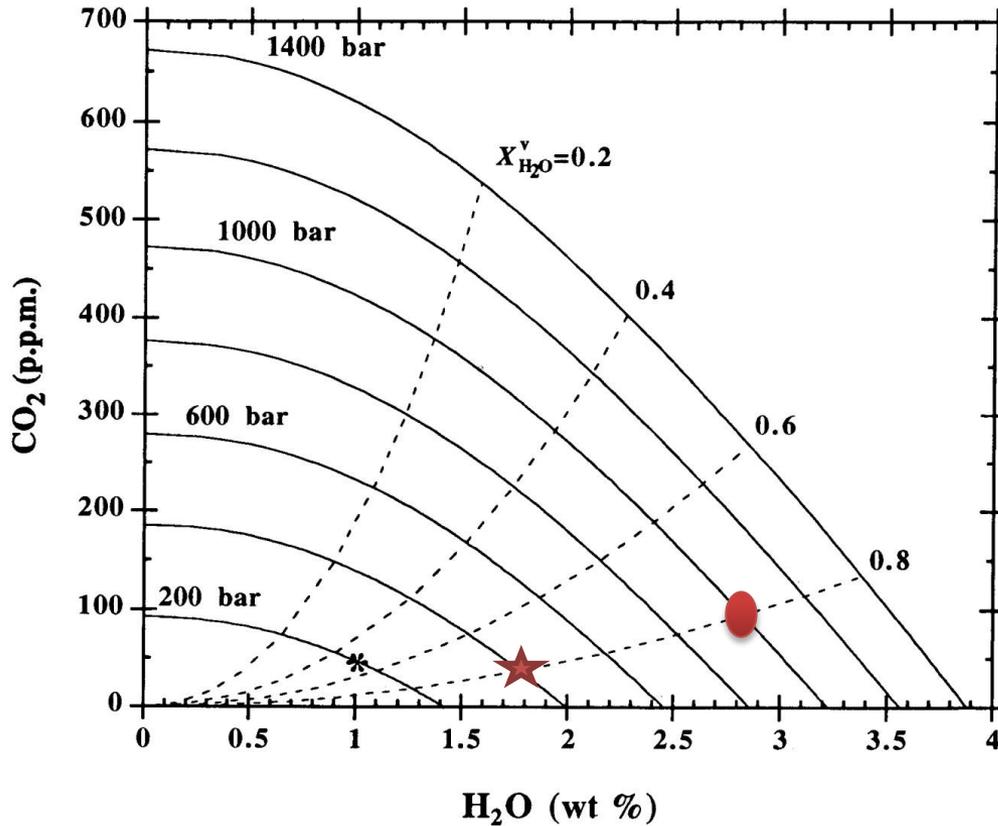
Растворимость CO_2



Система $\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$



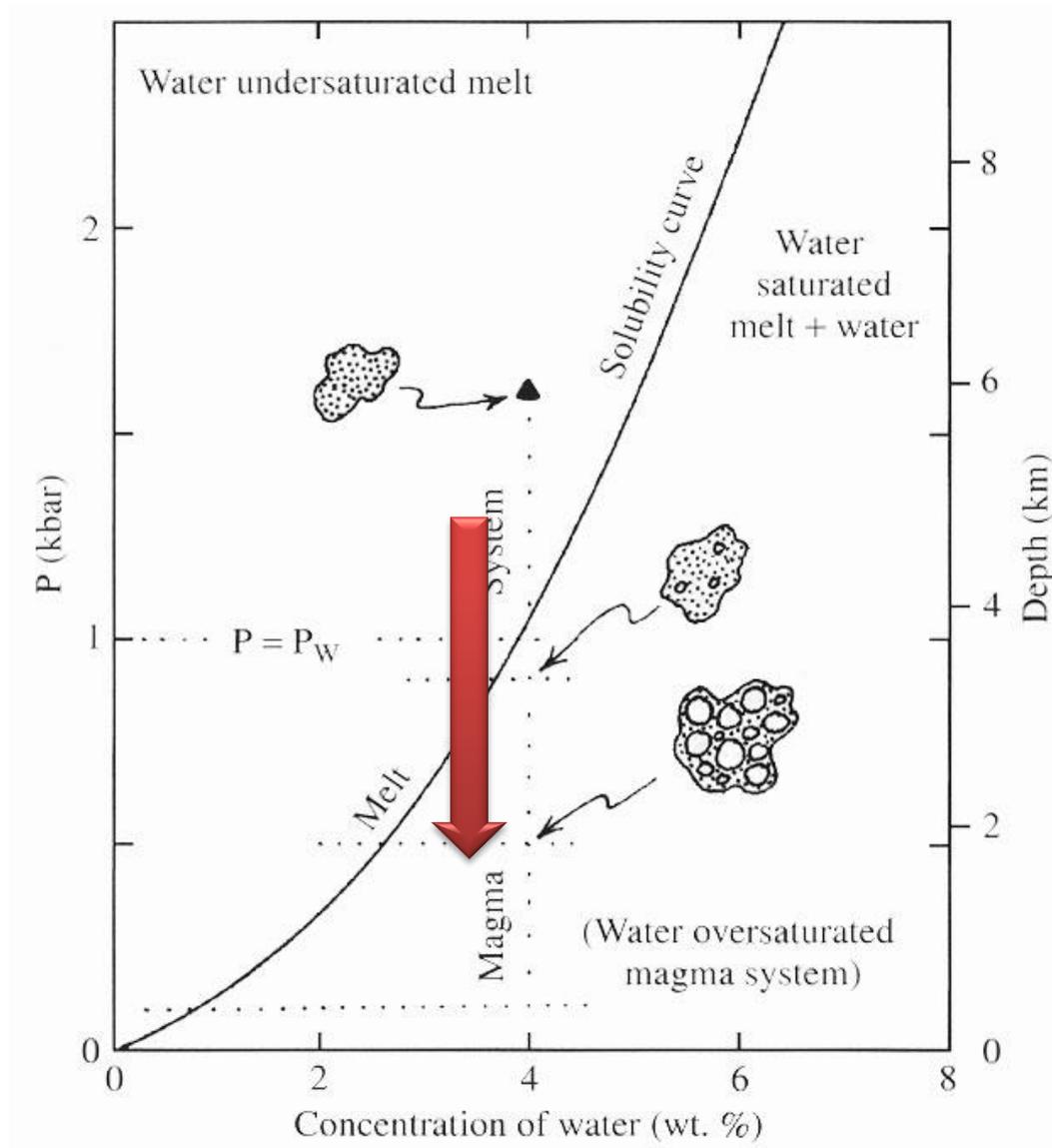
Оценить бюджет летучих при подъеме магмы



Магма с долей воды 80%
находится при давлении 100 МПа
и не содержит газа в пузырьках
(весь газ растворен).
Она поднимается до давления 40
МПа.

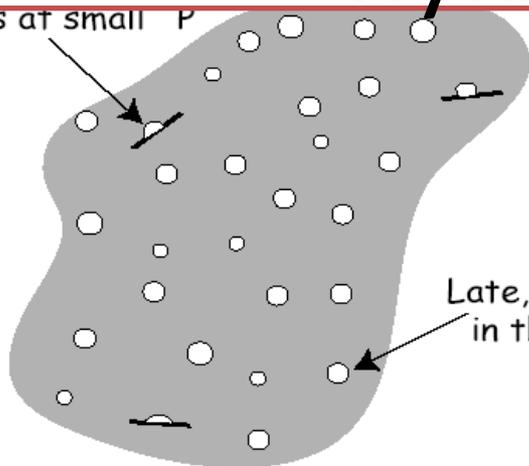
1. Сколько H₂O и CO₂ останутся
в растворенном состоянии?
2. Сколько выделится в
пузырьки?
3. Какой будет состав пузырьков
газа (относительная доля
H₂O)?

Нуклеация пузырьков



Гомогенная и гетерогенная нуклеация

on crystals at small P



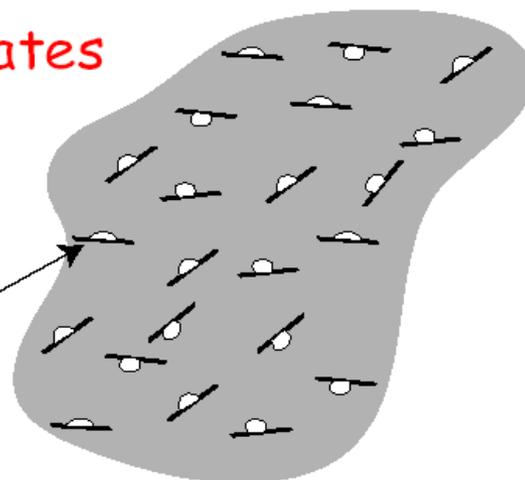
Crystallinity (cryptic sites)
 $<10^4/\text{cm}^3$

Late, homogeneous nucleation
in the bulk melt at large P

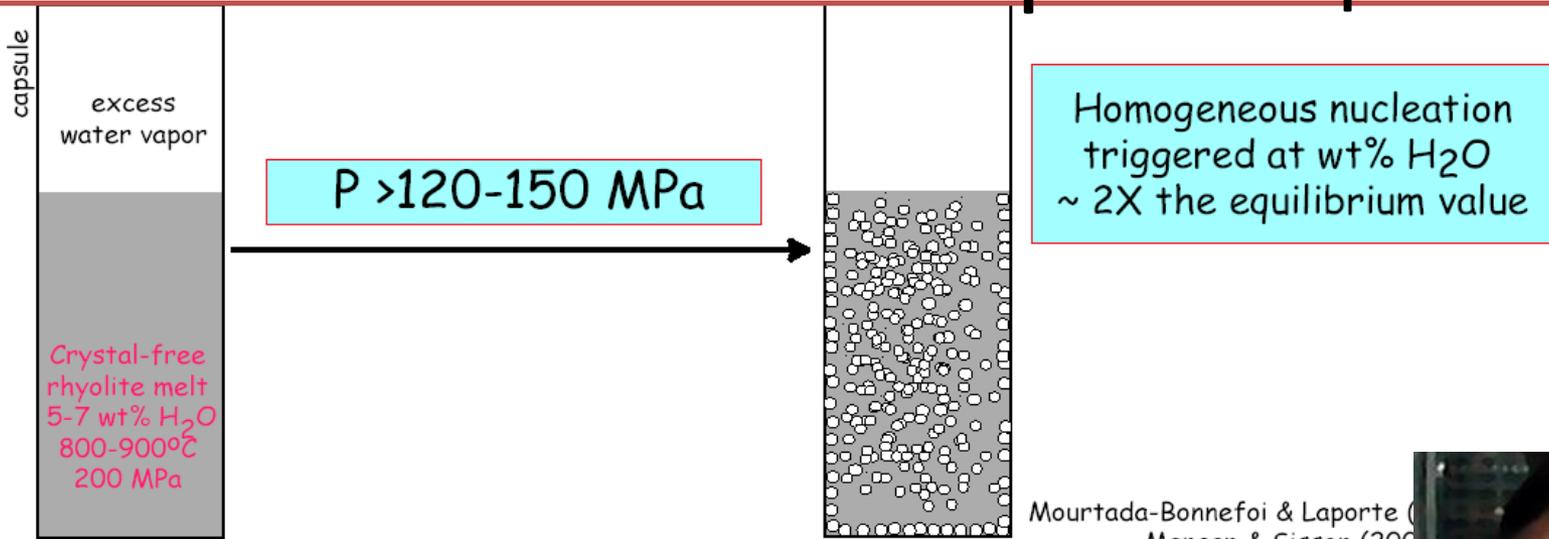
Heterogeneous Mechanism Dominates

Crystallinity (cryptic sites)
 $>10^6/\text{cm}^3$

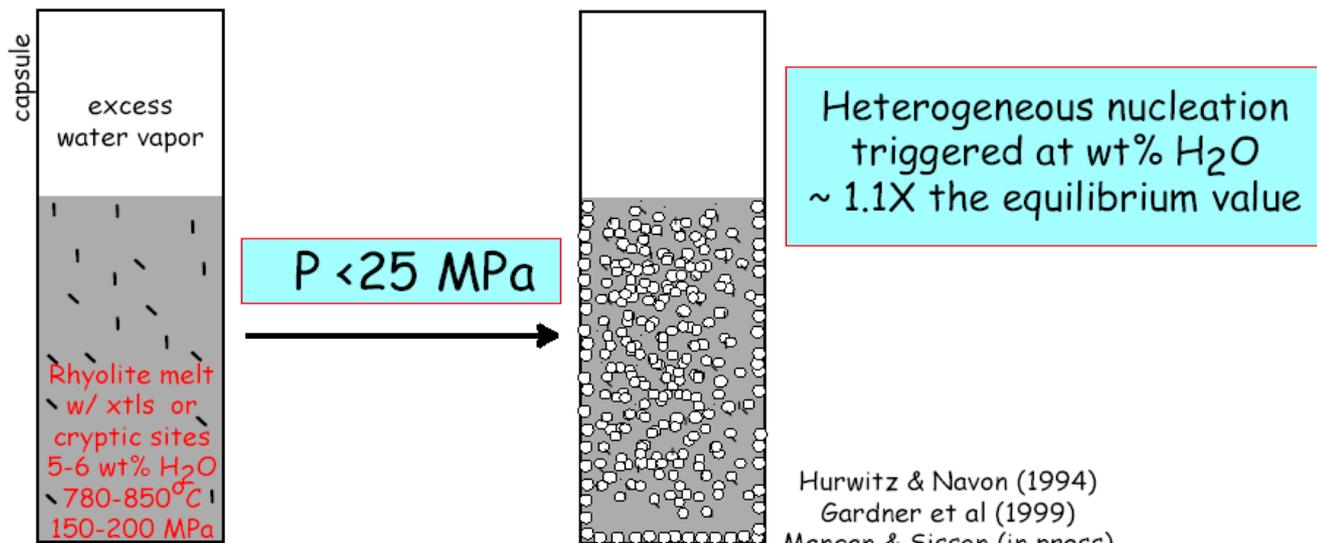
Early,
heterogeneous nucleation
on crystals at small P ,
no homogeneous nucleation



Гомогенная нуклеация требует очень больших пересыщений



Mourtada-Bonnefoi & Laporte (2000)
Mangan & Sisson (2000)

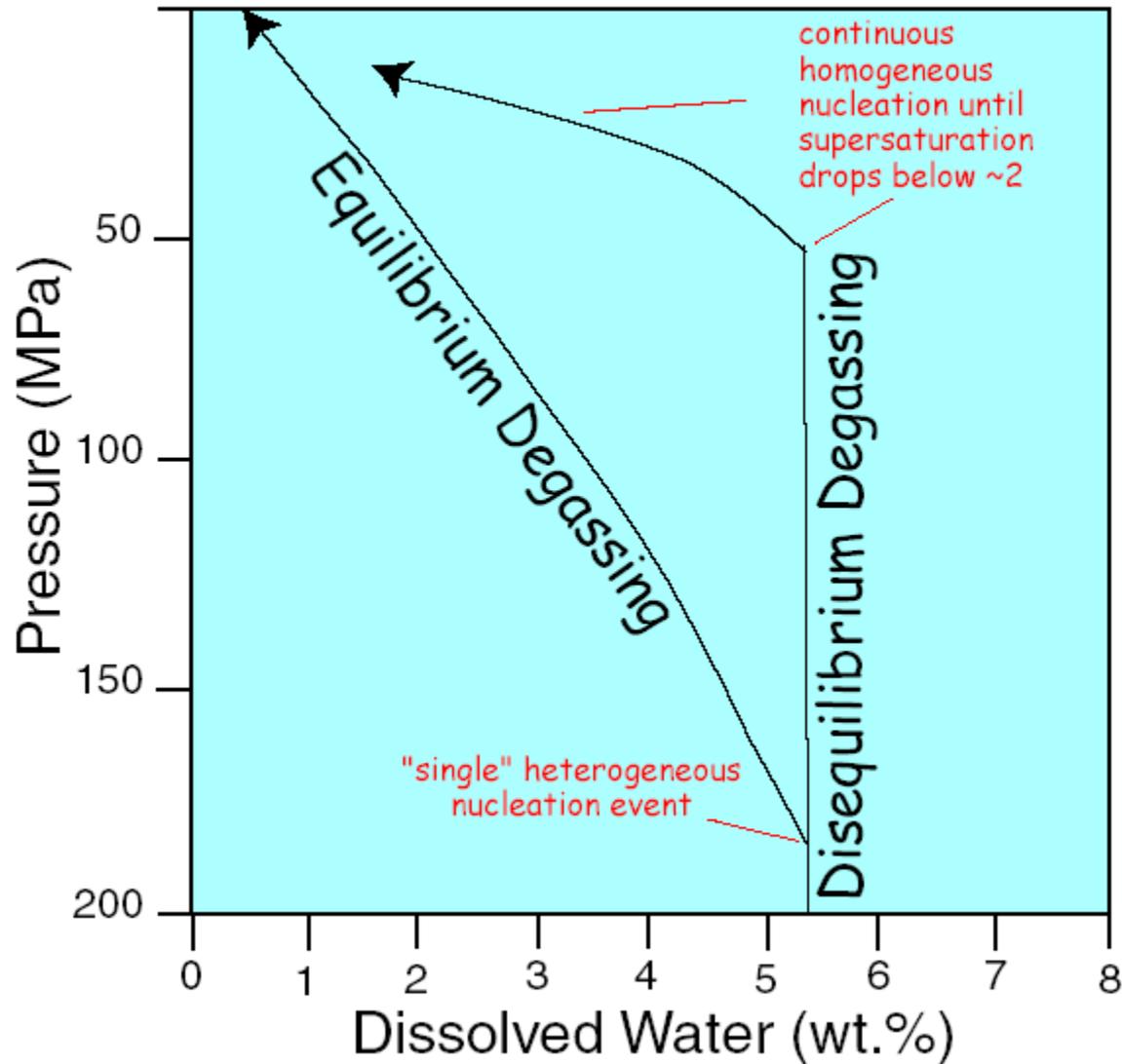


Hurwitz & Navon (1994)
Gardner et al (1999)
Mangan & Sisson (in press)



Margaret Mangan

Дегазация магмы

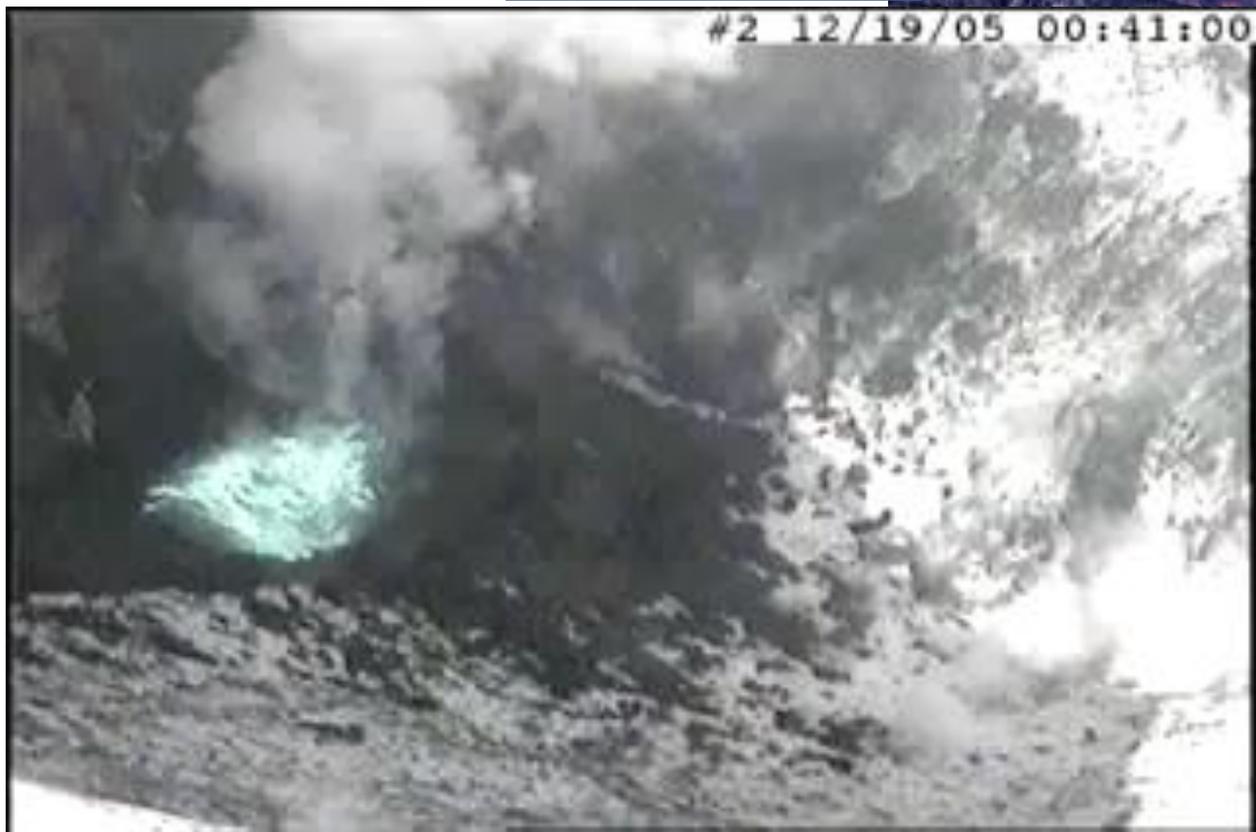


Миграция летучих в магме





Вулкан Эребус



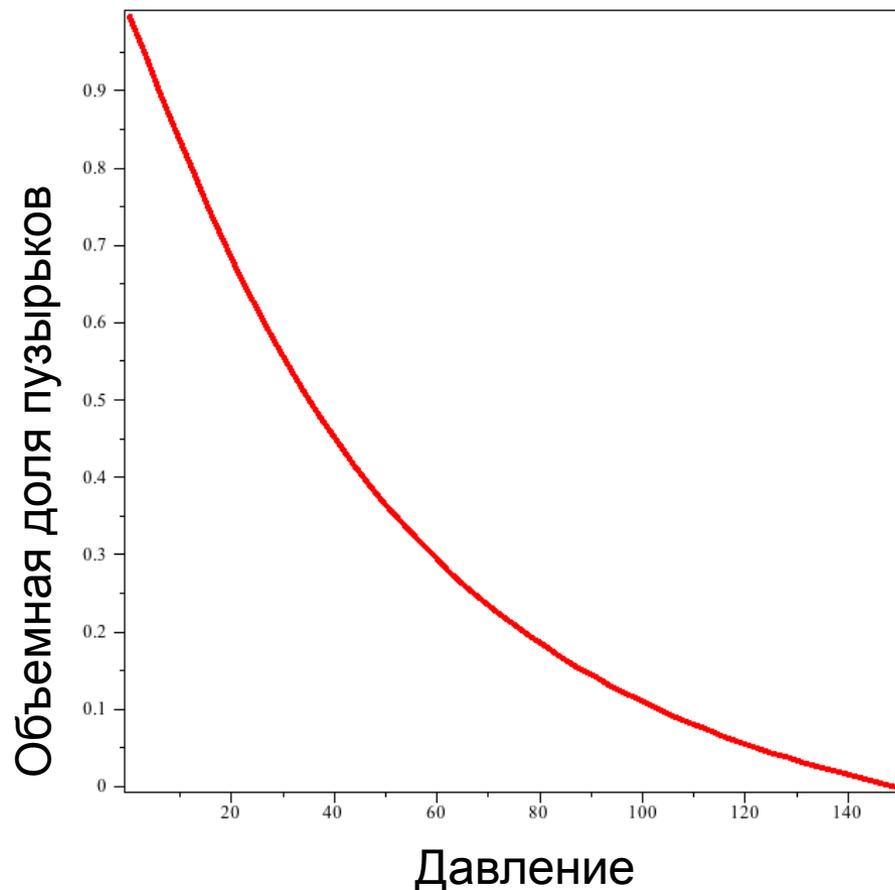
Если газ поднимается вместе с магмой.

Плотность магмы как функция массовой доли газа.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{C_0 - C}{\rho_g^0} + \frac{1 - (C_0 - C)}{\rho_m^0}$$

$$C = k\sqrt{p}; \rho_g^0 = \frac{p}{RT}; \rho_m^0 = const$$

Если бы газ не двигался относительно магмы, то при атмосферном давлении она состояла бы на 99% из пузырьков!



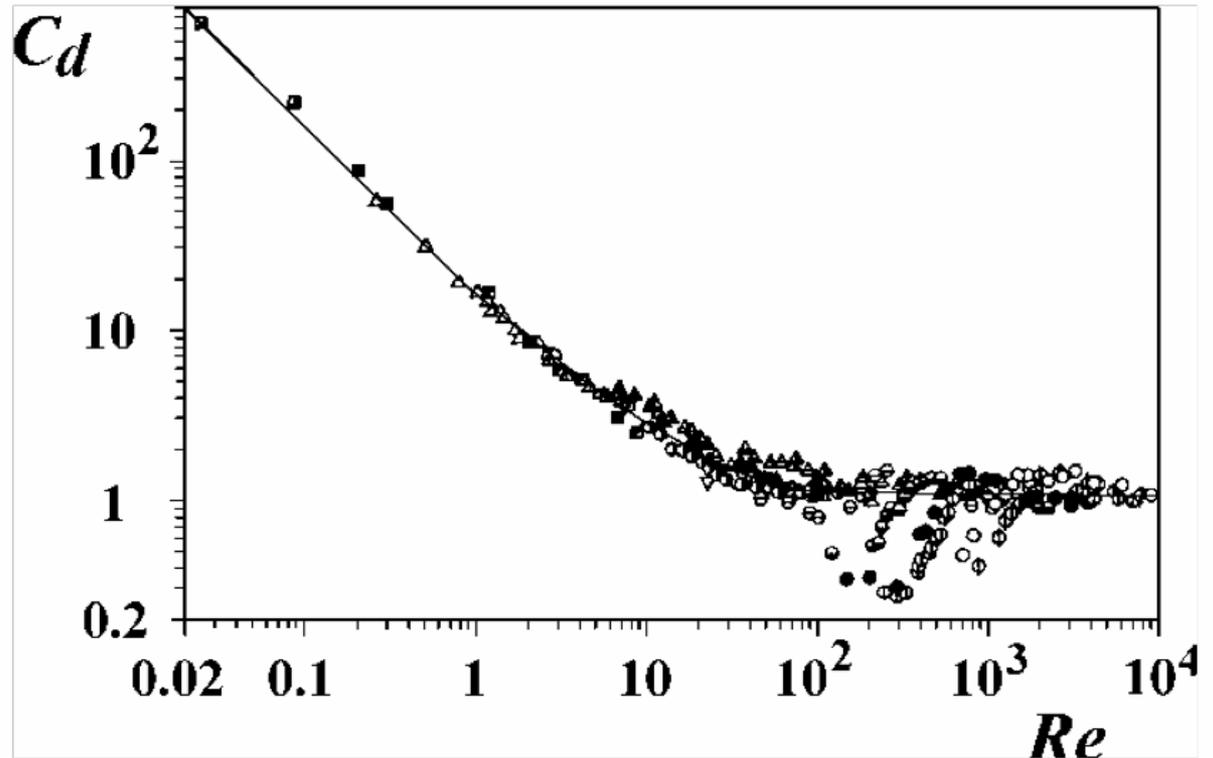
Скорость всплывания одиночного пузырька

$$Re_v = \frac{R\rho_l V}{\mu}$$

$$F = C_d \frac{\rho_l V^2}{R}$$

При малых числах
Рейнольдса

$$C_d = \frac{16}{Re}; Re < 10$$



Скорость всплывания одиночного

пузырька

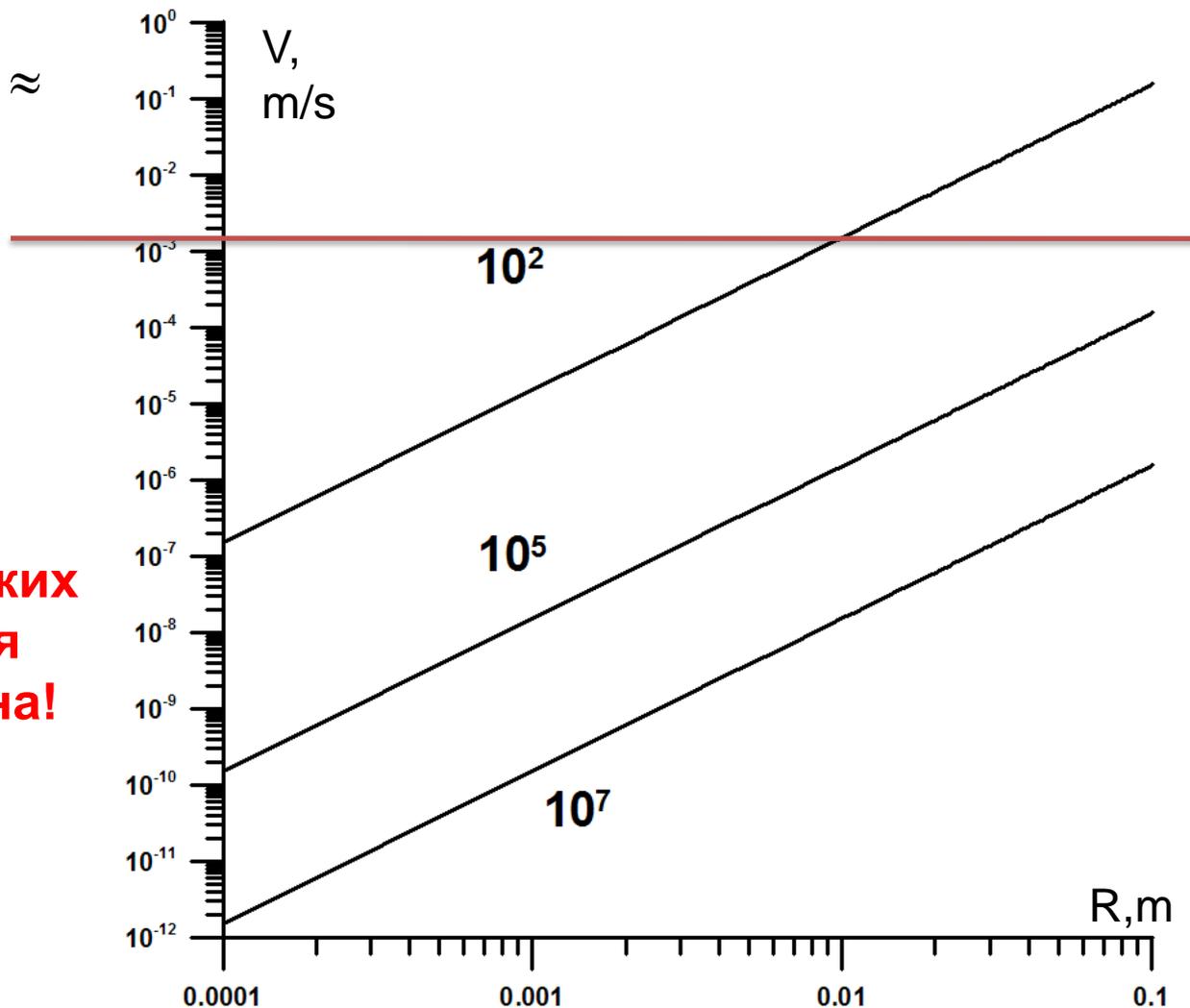
$$F_A = (\rho_l - \rho_g) g = \frac{16}{\text{Re}} \frac{\rho_l V^2}{R} = \frac{16\mu_l}{R^2} V = F_\mu$$

$$\rho_l \gg \rho_g \rightarrow V = \frac{\rho_l g R^2}{16\mu} \approx$$

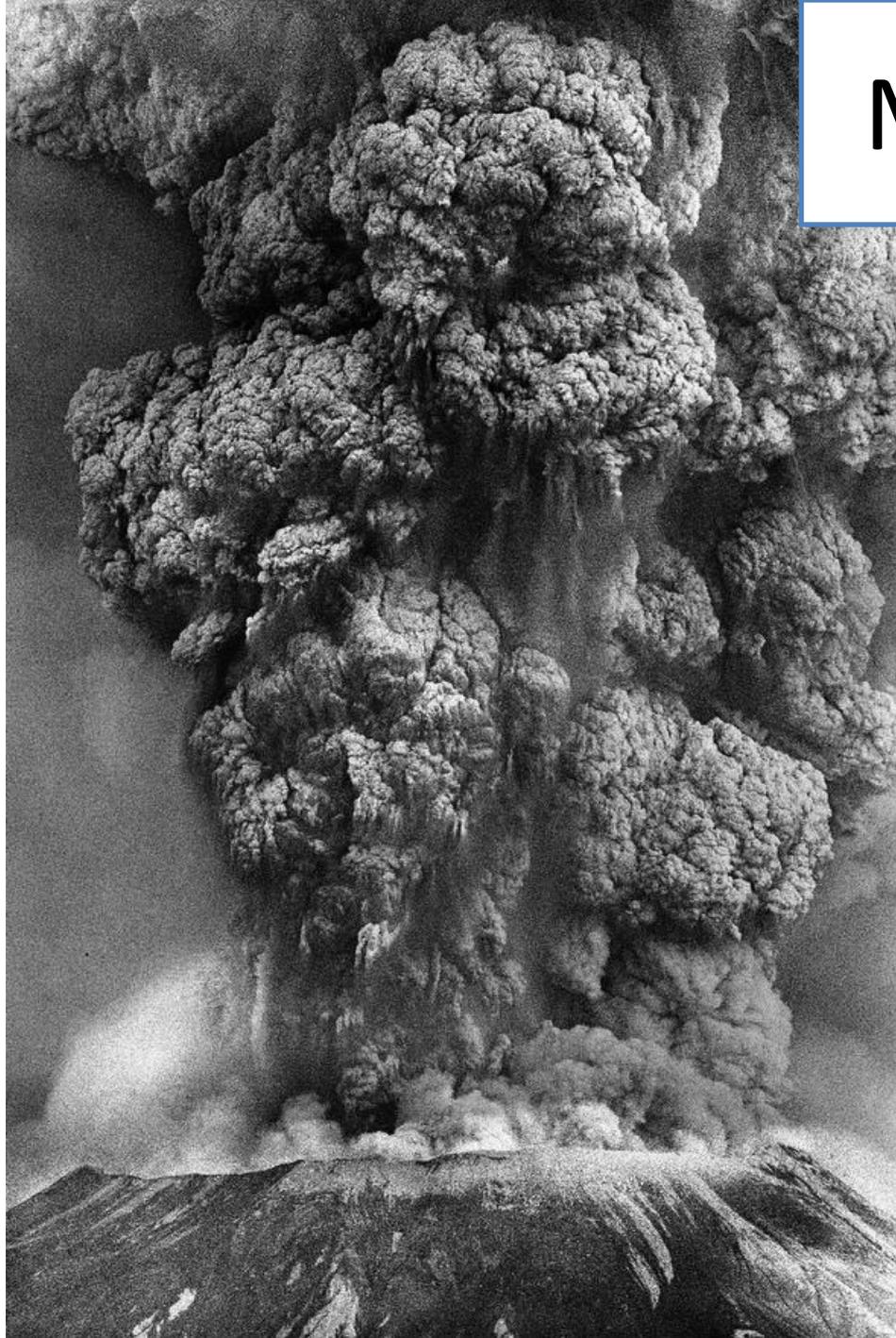
$$1530 \frac{R^2}{\mu}$$

Дегазация высоковязких магм за счет всплытия пузырьков невозможна!

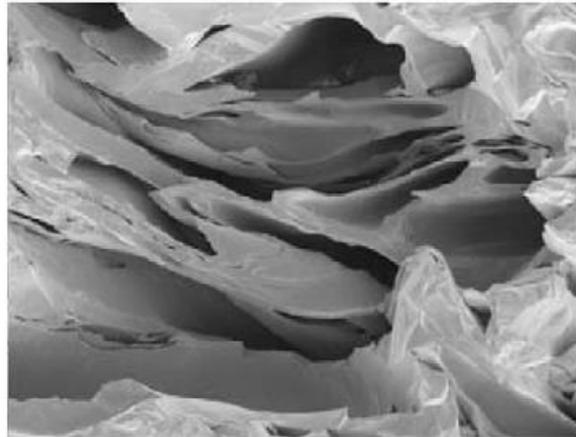
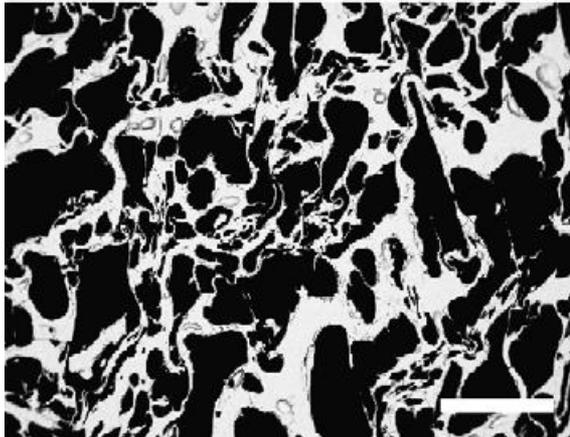
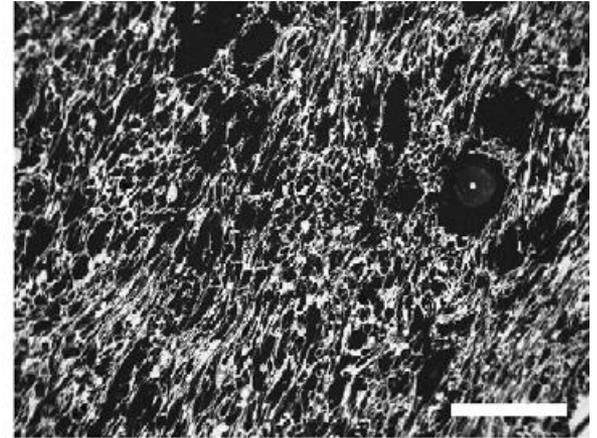
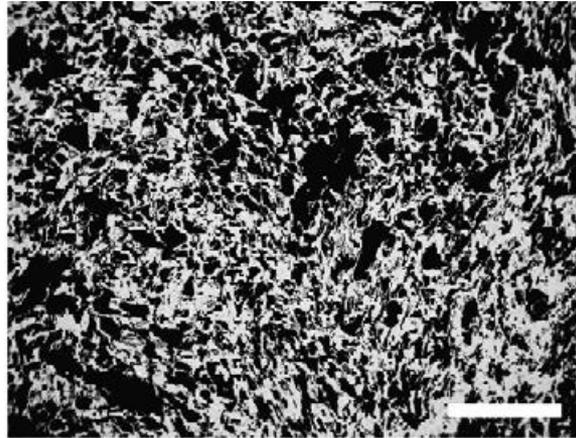
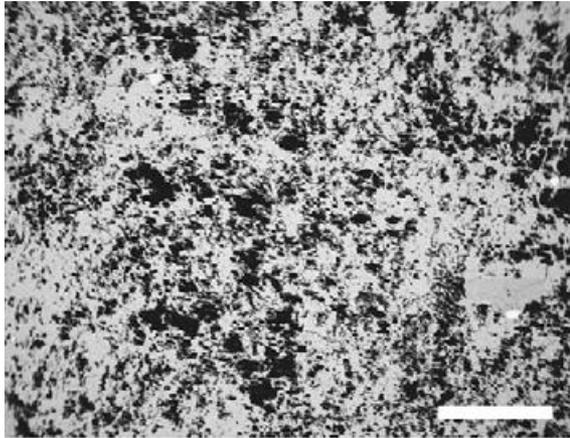
А как же лавовые купола?



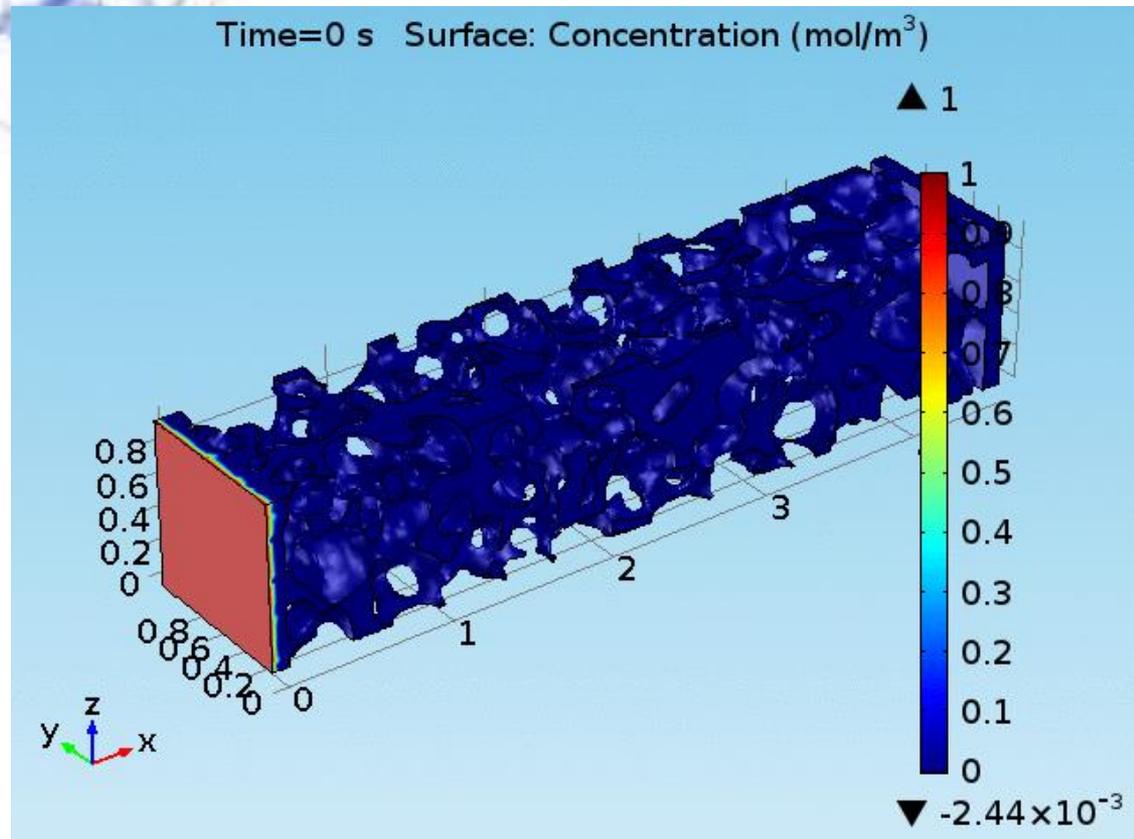
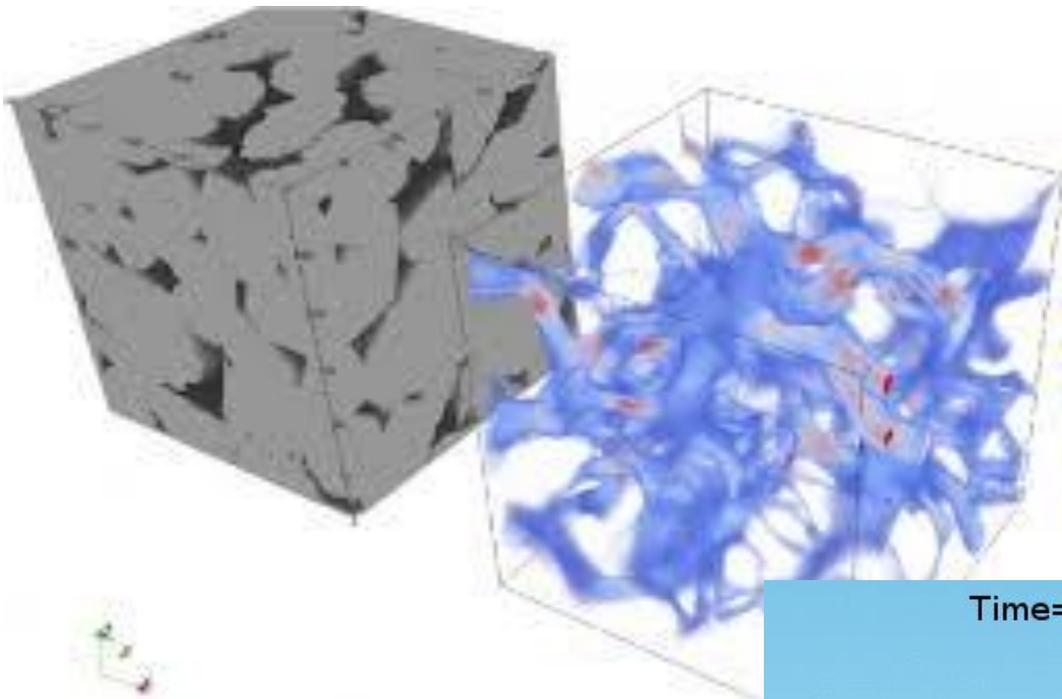
Маунт Сент Хеленс



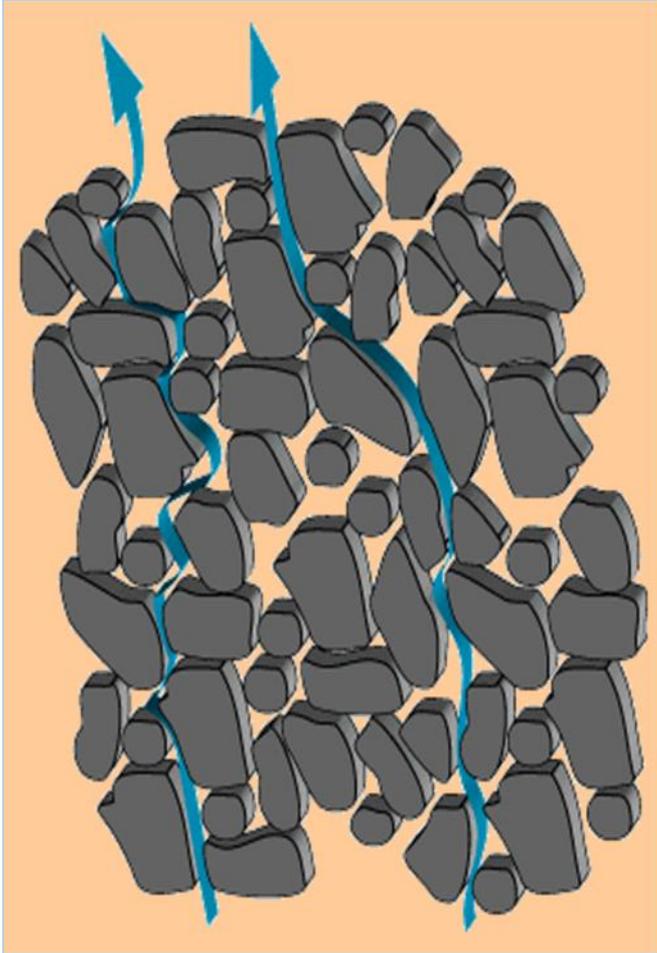
Пузырьки в магме не сферические и не изолированные



Фильтрация



Закон Дарси

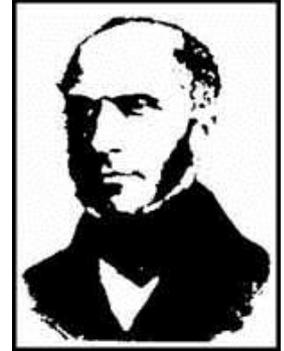


Проницаемая
пористая среда, газ
занимает объем α

Закон Дарси

$$\vec{U}_g = -\frac{k(\alpha)}{\mu_g} \text{grad}(P);$$

$$\text{grad}(P) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x, \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y, \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$



Henry Darcy

Аналог между течениями Дарси и Пуазейля



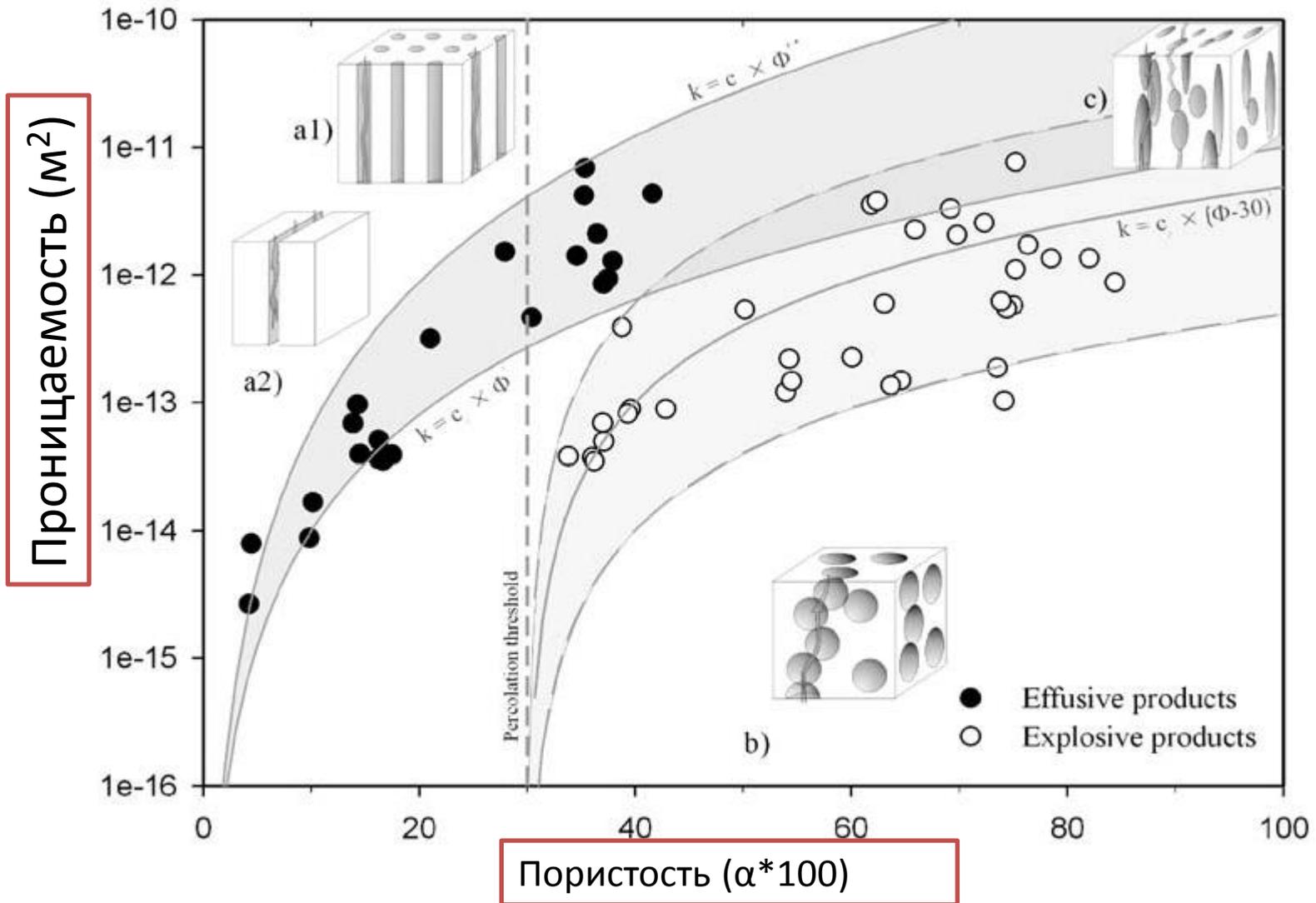
Представим пористую среду как набор параллельных труб, диаметра D . Тогда:

$$U = \alpha V = -\alpha \frac{D^2}{32\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

Отсюда следует

$$k = \alpha \frac{D^2}{32}$$

Зависимость проницаемости от пористости



Оценки для скорости фильтрации газа.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= -\rho(1-\alpha)g - 32\frac{\mu V}{D^2} = \\ &= -2500 * 0.5 * 9.8 - 32\frac{10^7 10^{-3}}{30^2} = -12605\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\end{aligned}$$

Оценим скорость движения газа сквозь магму

$$\frac{V_g - V}{V} = -\frac{k(\alpha)}{\alpha\mu_g} \frac{dp}{dx} = \frac{12605 * 10^{-12}}{0.5 * 10^{-5} 10^{-3}} \approx 2.5$$

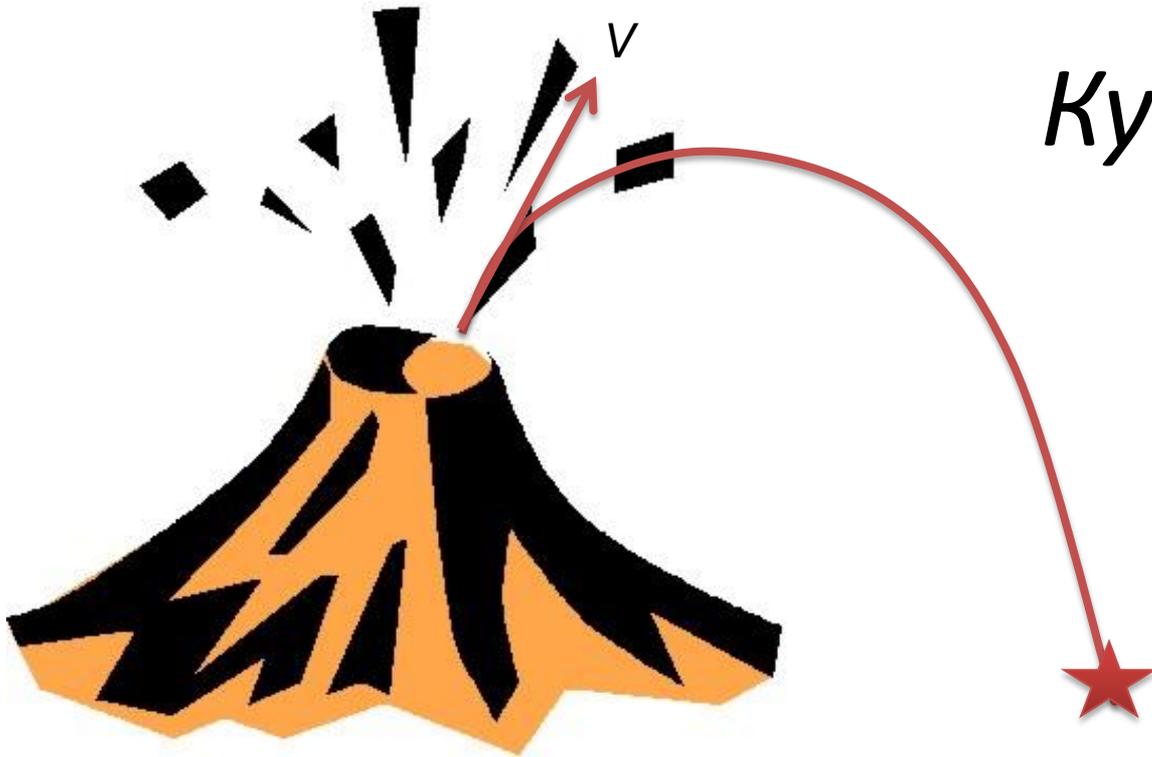
Газ движется в 2.5 раза быстрее магмы!

Полет вулканической бомбы



Итак вулкан изверг бомбу со
скоростью V , под углом α .

Вопрос!
Куда бежать?



Сила сопротивления при обтекании бомбы воздухом

Полная сила, действующая на F_d частицу

$$F_d = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

Коэффициент сопротивления

$$Re_p = \frac{d_p V \rho}{\mu}$$

Площадь миделева сечения = $\pi d_p^2/4$

(1) $Re_p < 2$, ламинарное (Закон Стокса)

$$C_D = \frac{24}{Re_p}$$

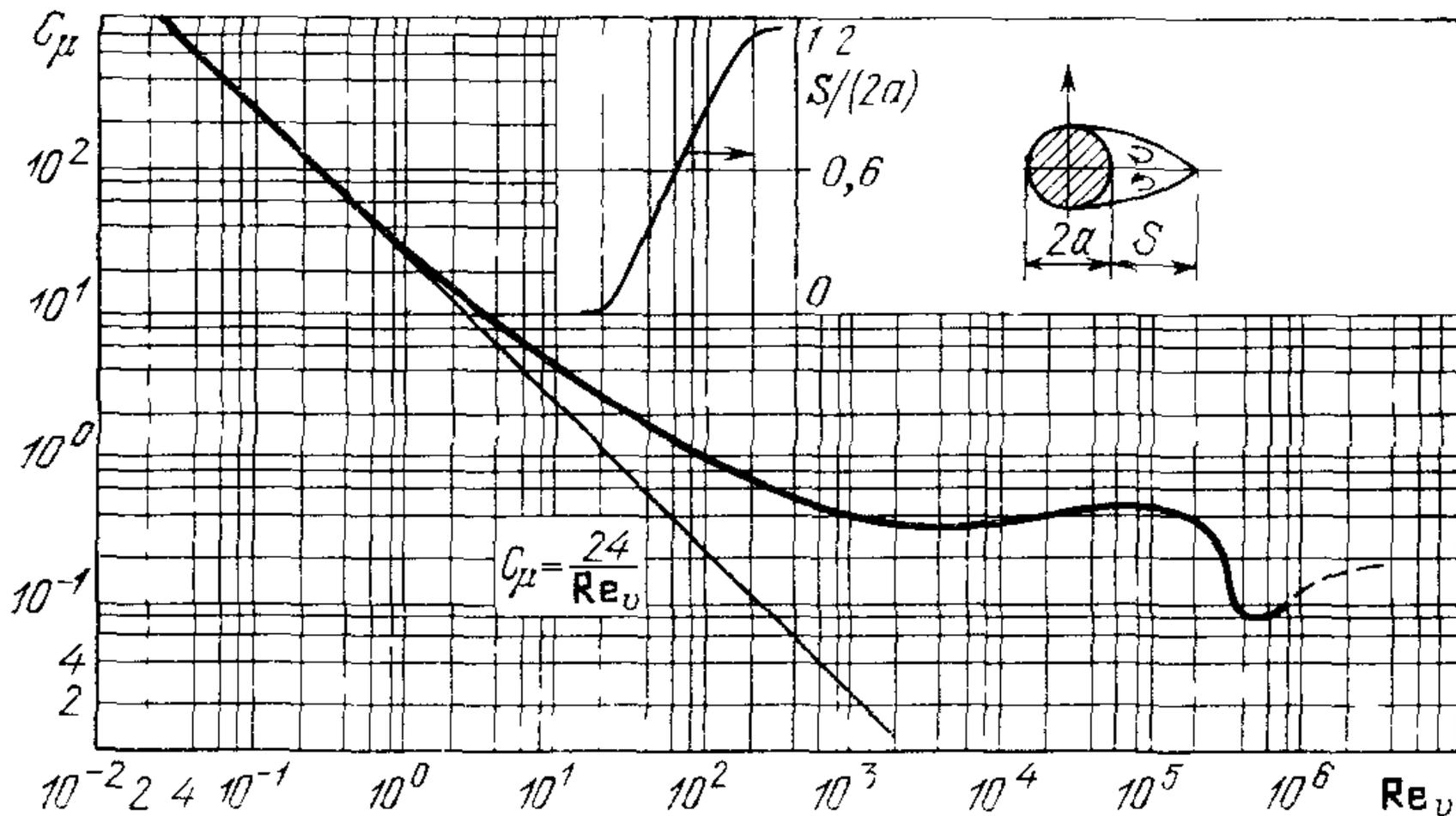
(2) $2 < Re_p < 500$, переходное (Закон Аллена)

$$C_D = \frac{18.5}{Re_p^{0.6}}$$

(3) $500 < Re_p < 2 \times 10^5$, турбулентное (закон Ньютона)

$$C_D \approx 0.44$$

Коэффициент сопротивления в зависимости от Re



В случае трехмерного поля скоростей газа и движения частицы выражение для силы:

$$\vec{F}_d = C_D A_p \frac{\rho_g |\vec{V}_g - \vec{V}_p| (\vec{V}_p - \vec{V}_g)}{2}$$

Уравнения движения бомбы.

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma F \quad \text{2-й закон Ньютона.}$$

В проекции на оси координат

$$m \frac{dV_x}{dt} = -F_{d,x} = -C_D A_p \frac{\rho_g |\vec{V}|}{2} V_x;$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -mg - F_{d,y} = -mg - C_D A_p \frac{\rho_g |\vec{V}|}{2} V_y$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

Решение без учета сопротивления воздуха.

$$x(t) = tV \cos(\alpha), \quad y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2 + V \sin(\alpha)t$$

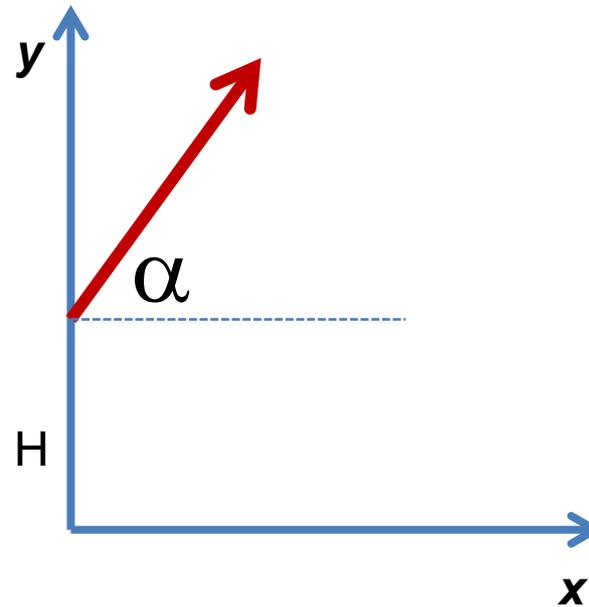
Начальная скорость 100 м/с

Начальный угол 45 и 60°

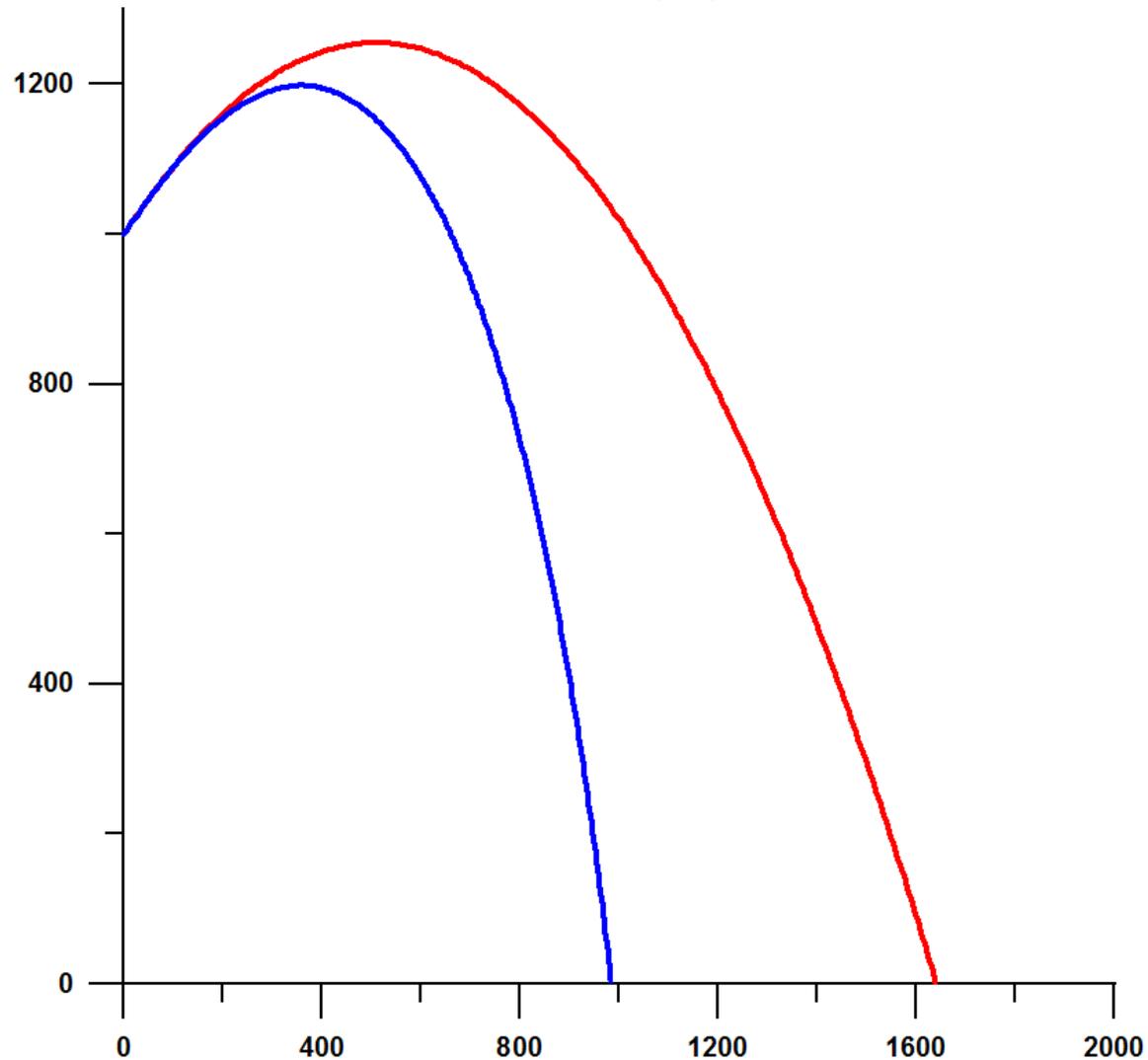
Высота кратера 1000 м

Вычислить:

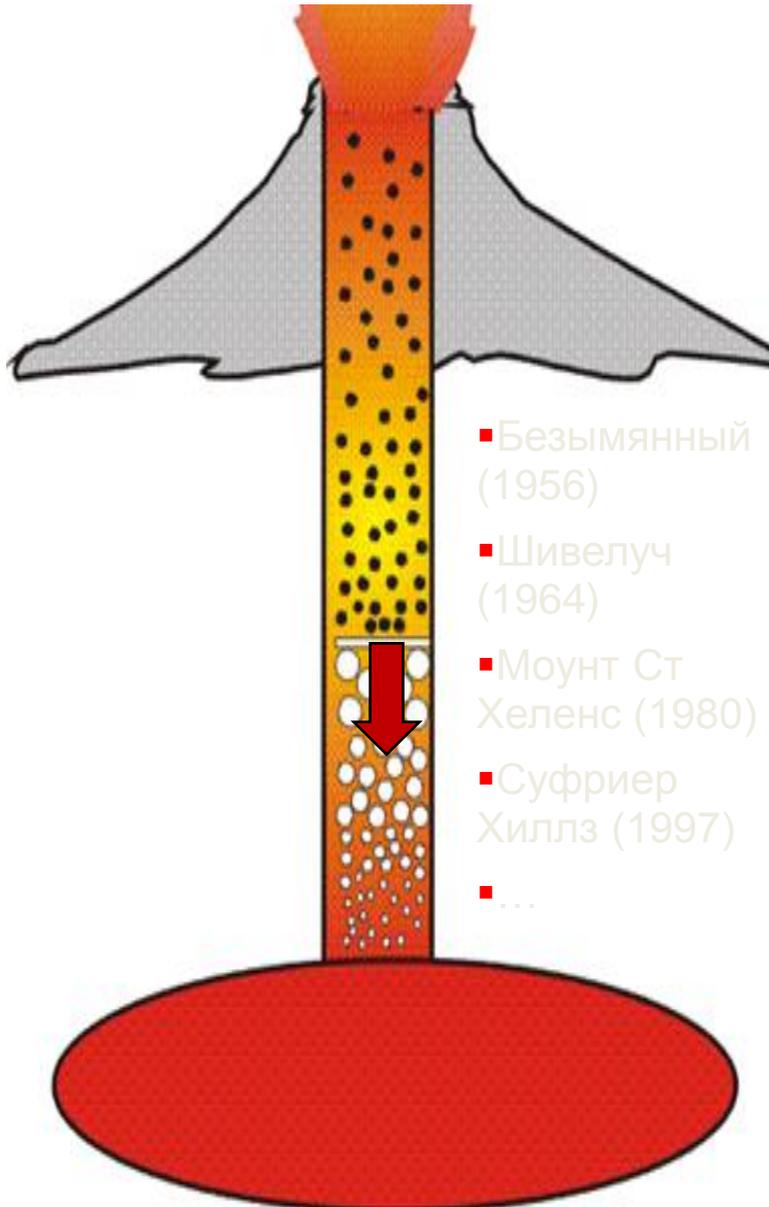
1. Максимальную высоту подъема бомбы.
2. Дальность по горизонтали до точки приземления.
3. Время полета бомбы до приземления.



С учетом сопротивления бомба
полетит не так далеко!



Моделирование взрывного извержения



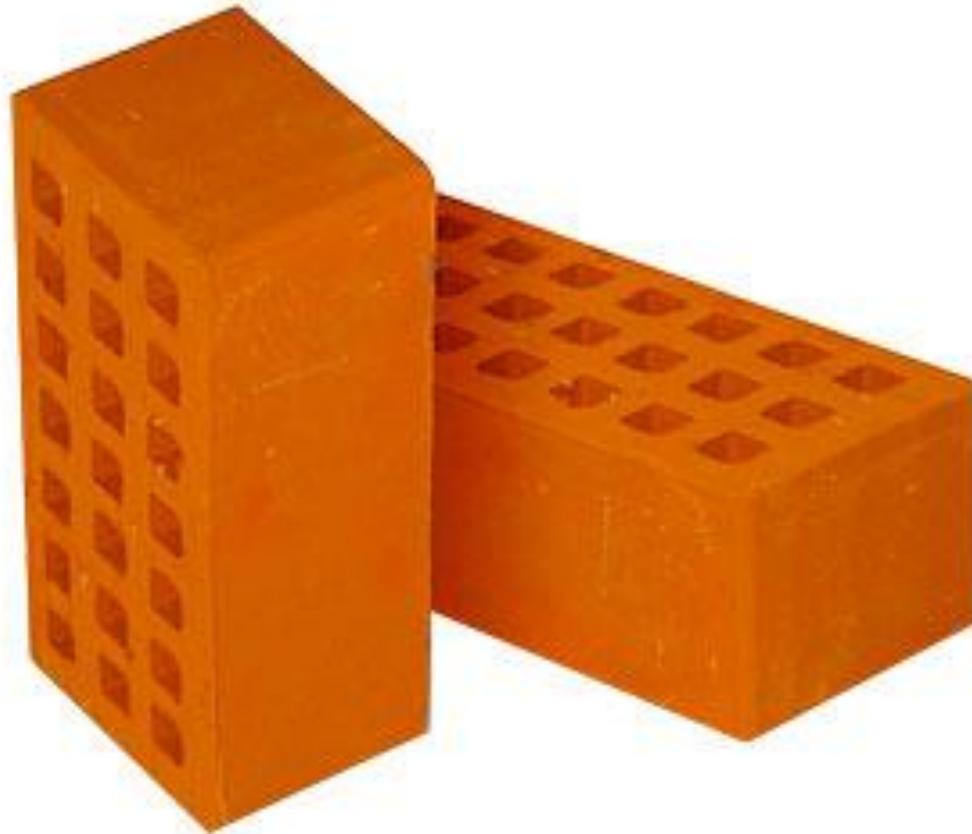
- Безымянный (1956)
- Шивелуч (1964)
- Моунт Ст Хеленс (1980)
- Суффриер Хиллз (1997)
- ...

Течение газозвеси

Условия фрагментации

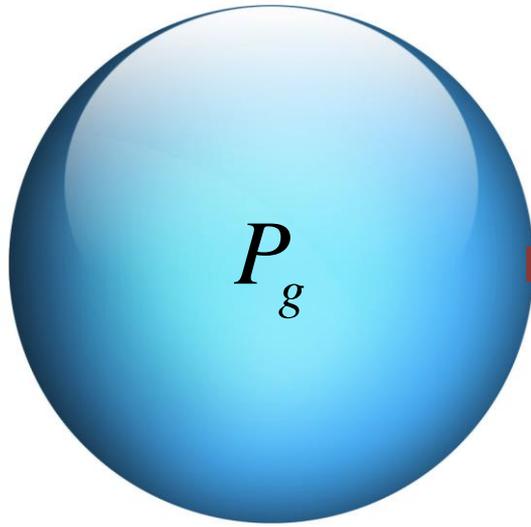
Течение пузырьковой жидкости

Кирпичики модели



P_∞

Связь давления в пузырьке и магме

 \dot{R}

Скорость расширения
пузырька

$$P_g - P_\infty(t) = \frac{2\sigma}{R} + \rho \left(\frac{3}{2} \dot{R}^2 + R\ddot{R} \right) + 4\mu \frac{\dot{R}}{R}$$

Малые члены

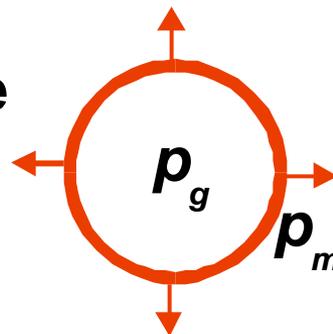


Rayleigh, John William
Strutt (1842-1919)

Модели фрагментации магмы

► Фиксированная объемная доля пузырьков (Спаркс 1978).

► Критическое избыточное давление в растущем пузырьке (Бармин, Мельник, 1993)



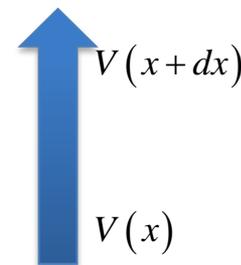
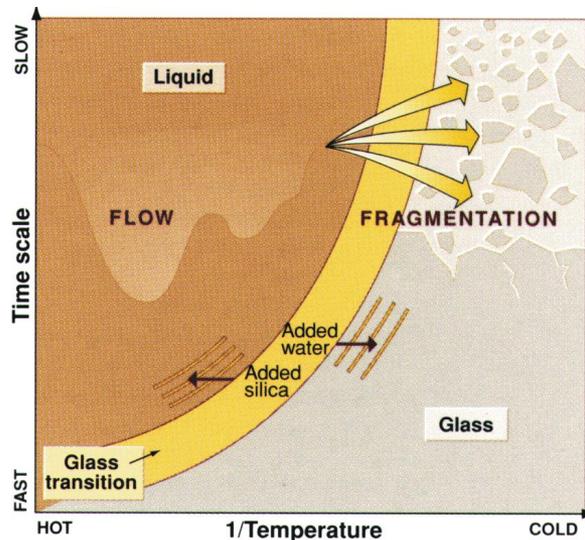
$$p_g - p_m = \frac{4\mu_m}{R} \frac{dR}{dt} +$$

малые члены

Критическая скорость

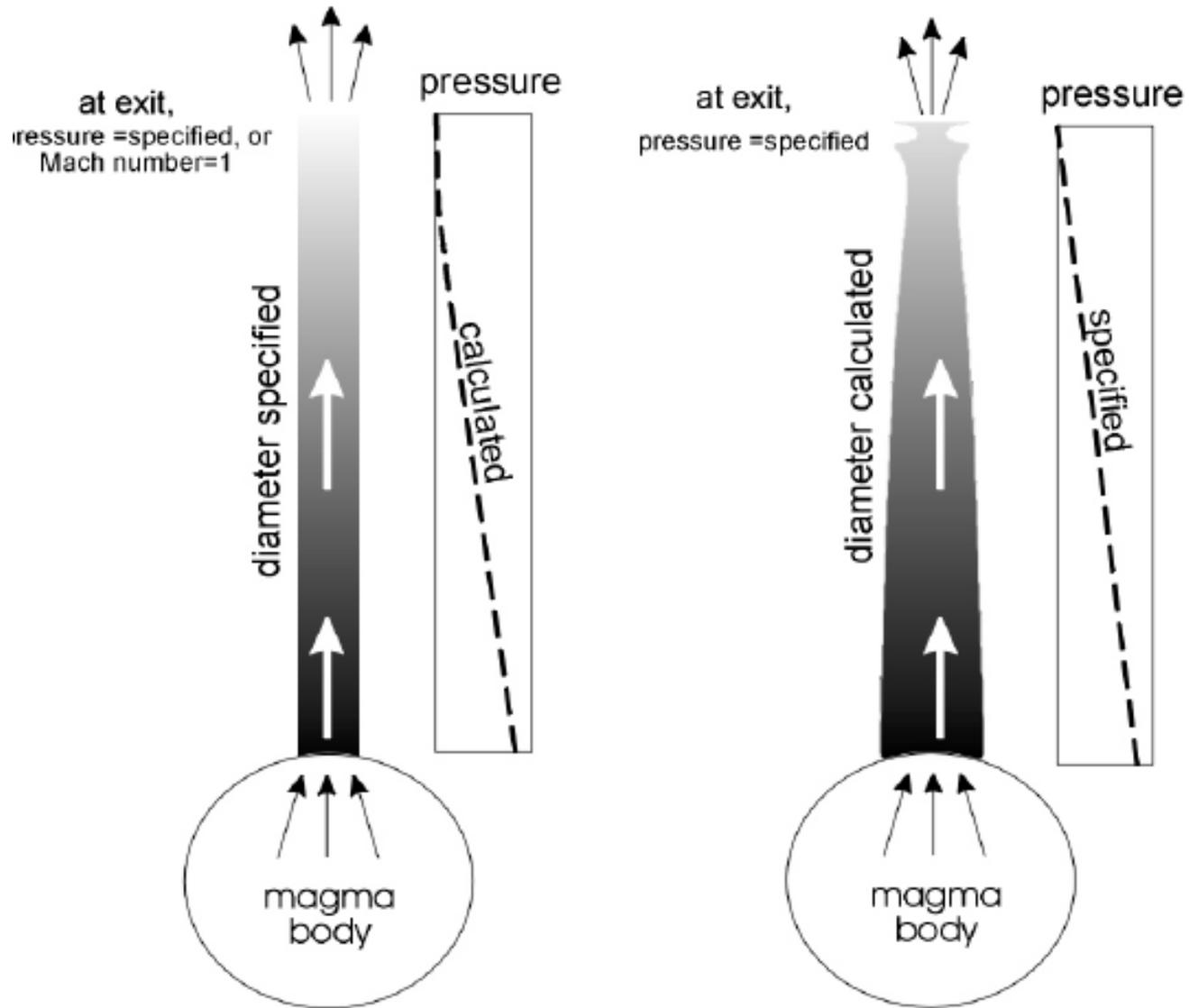
► растяжения
Parale P, 1999

$$\frac{dV}{dx} > E_* (\mu)$$

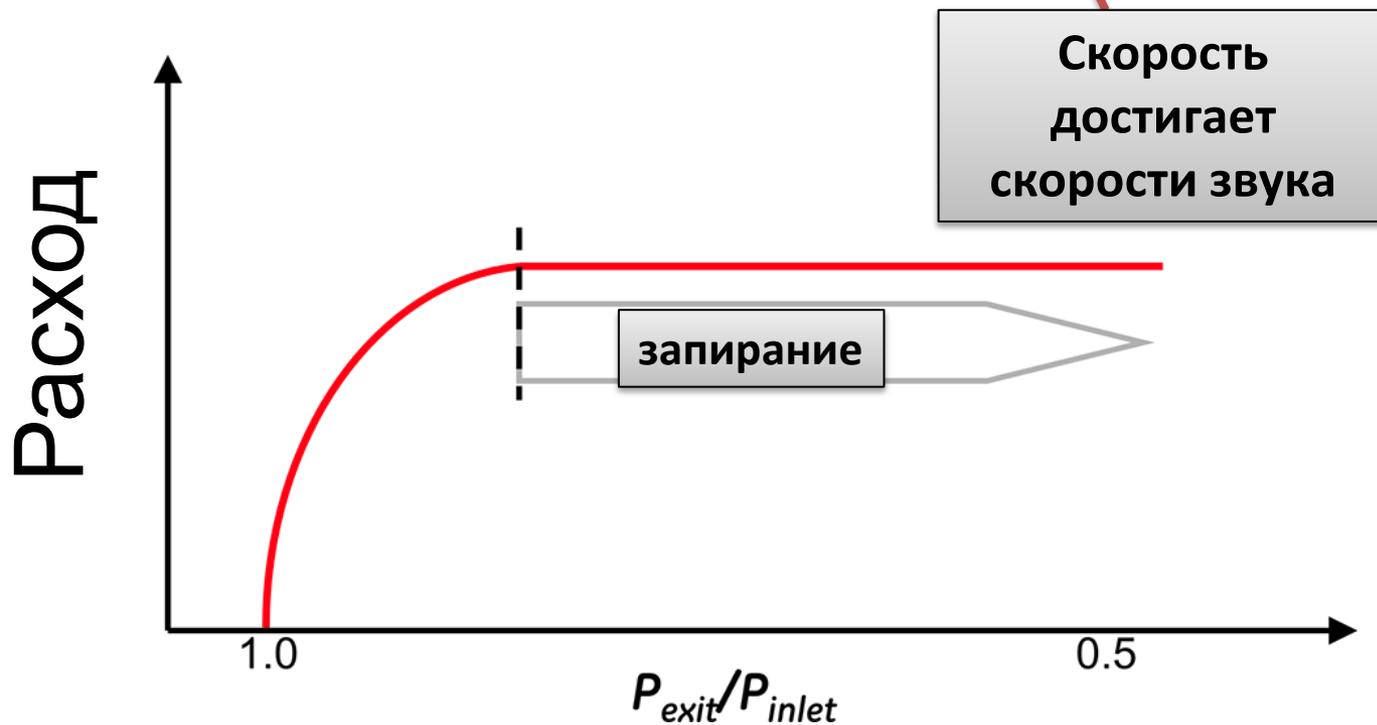
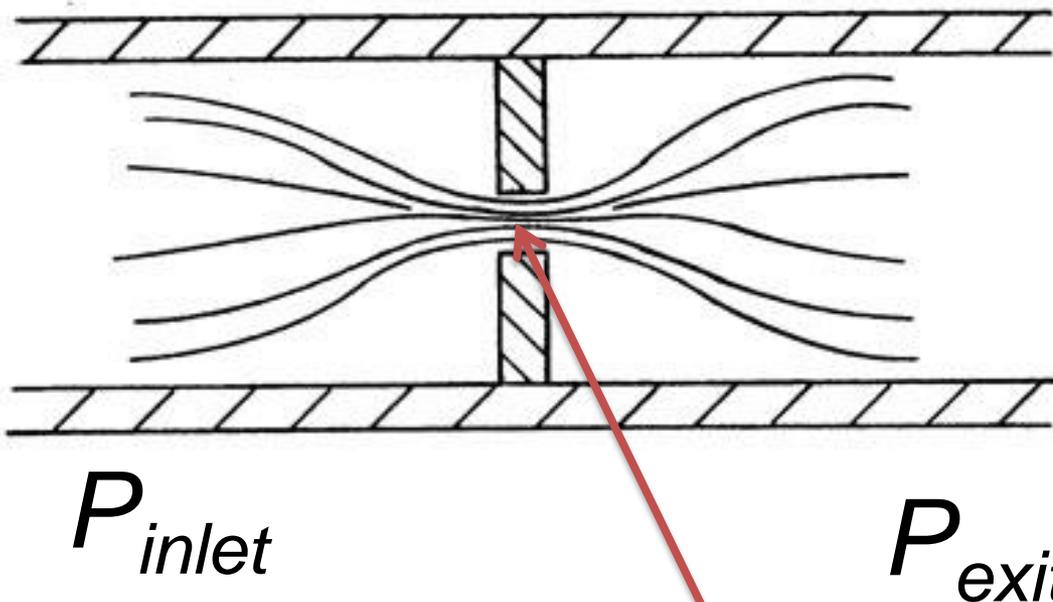


$$\frac{dV}{dx} = \frac{V(x+dx) - V(x)}{dx}$$

Гидростатический или литостатический градиент давления?



Условие запирания





Простейшая модель

$$\frac{d}{dx} \rho V = 0 \Rightarrow \rho V = Q = \text{const}$$

$$\rho V \frac{dV}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \rho g - \lambda \frac{\rho V^2}{2D}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1-x_g}{\rho_m^0} + \frac{x_g}{\rho_g^0}; \quad x_g = x_0 - C_g \sqrt{p};$$

$$\rho_g^0 = \frac{p}{RT};$$

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

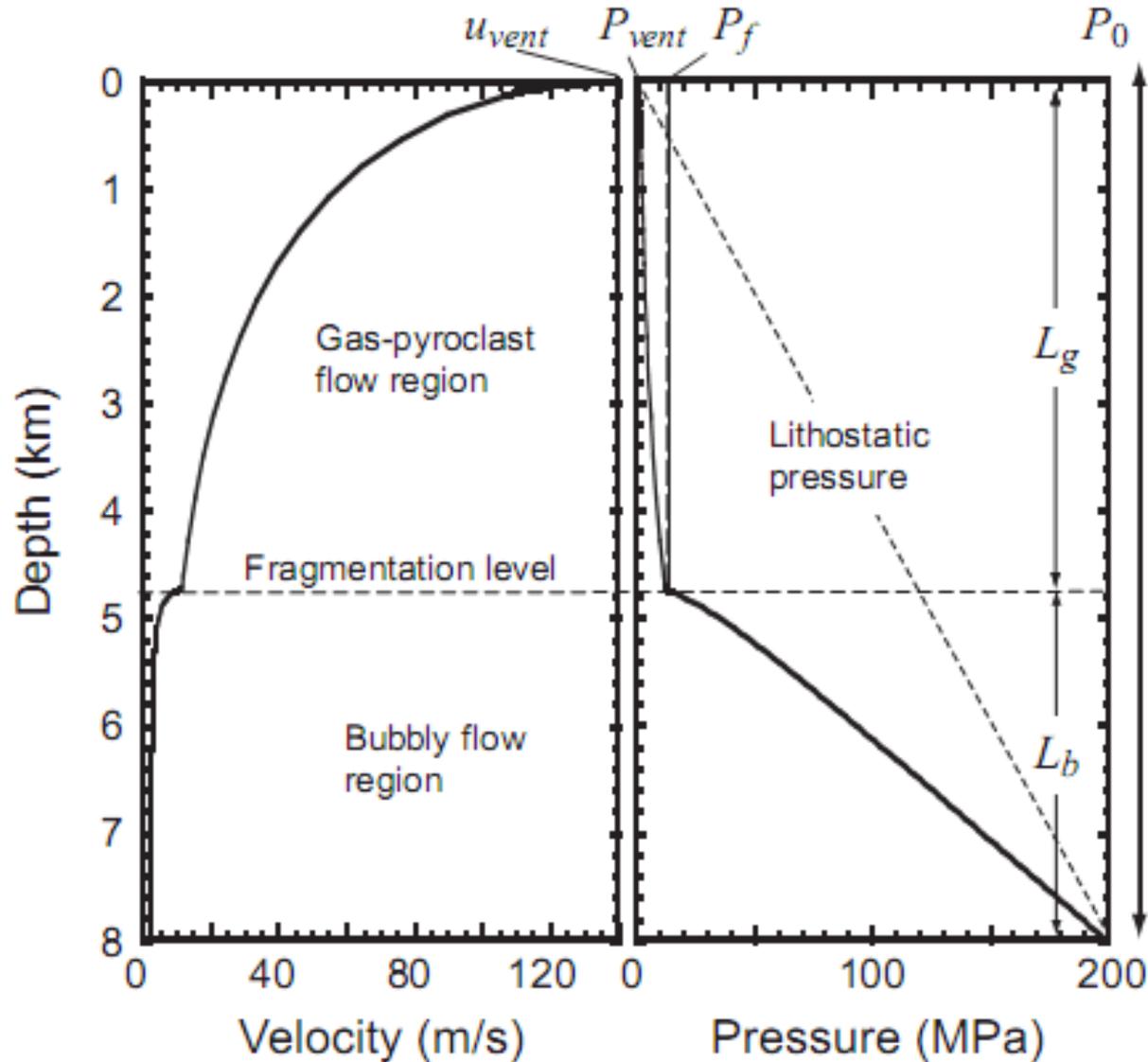
$X=0$ (очаг) : $P=P_{\text{ch}}$

$X=L$ (атм.) : Условие
запирания или
атмосферное давление

$X=X_f$ (фрагм): $\alpha = \alpha_* \approx 0.7$

Koyaguchi, T., 2005. An analytical study for 1-dimesional steady flow in volcanic conduits. J. Volcanol. Geotherm. Res. 143, 29–52.

Профили скорости и давления в канале

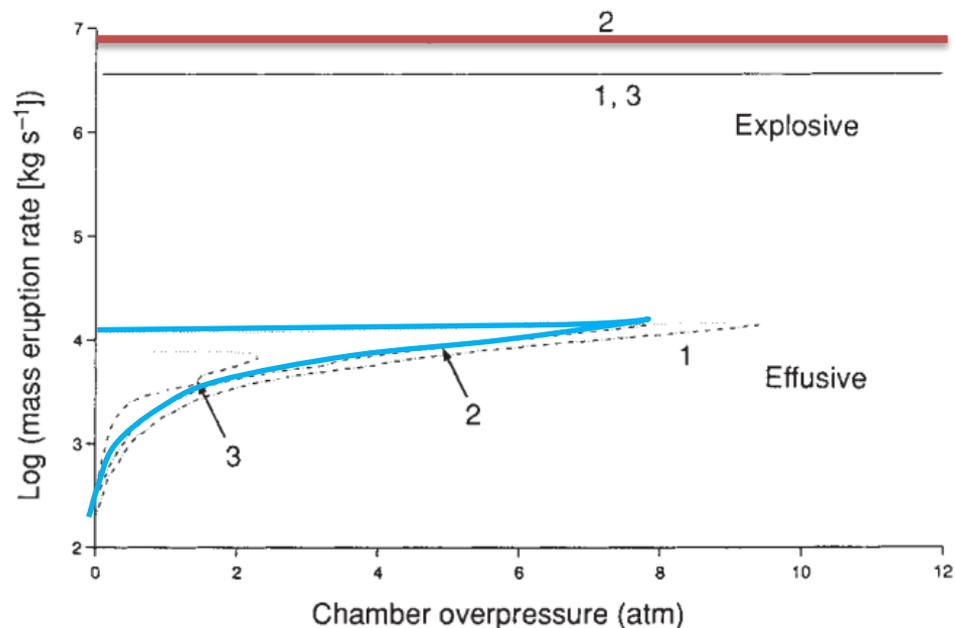




Уток газа в стенки канала

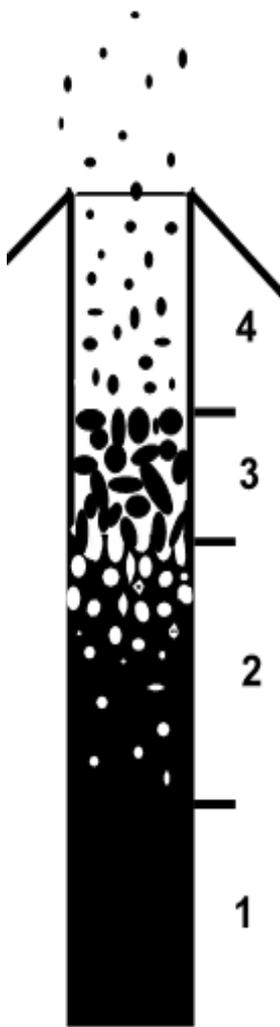
A.W. Woods, T. Koyaguchi (1994) Transitions between explosive and effusive eruptions of silicic magmas. *Nature*, 370: 641-644

При подъеме
магмы
происходит
фильтрация
газа в
окружающие
породы



$$\frac{d}{dx} \rho V = - Q_w = 2\pi r \rho_w K (p - p_h) / \mu L$$

Учет фильтрации через магму (Слезин, 1983)



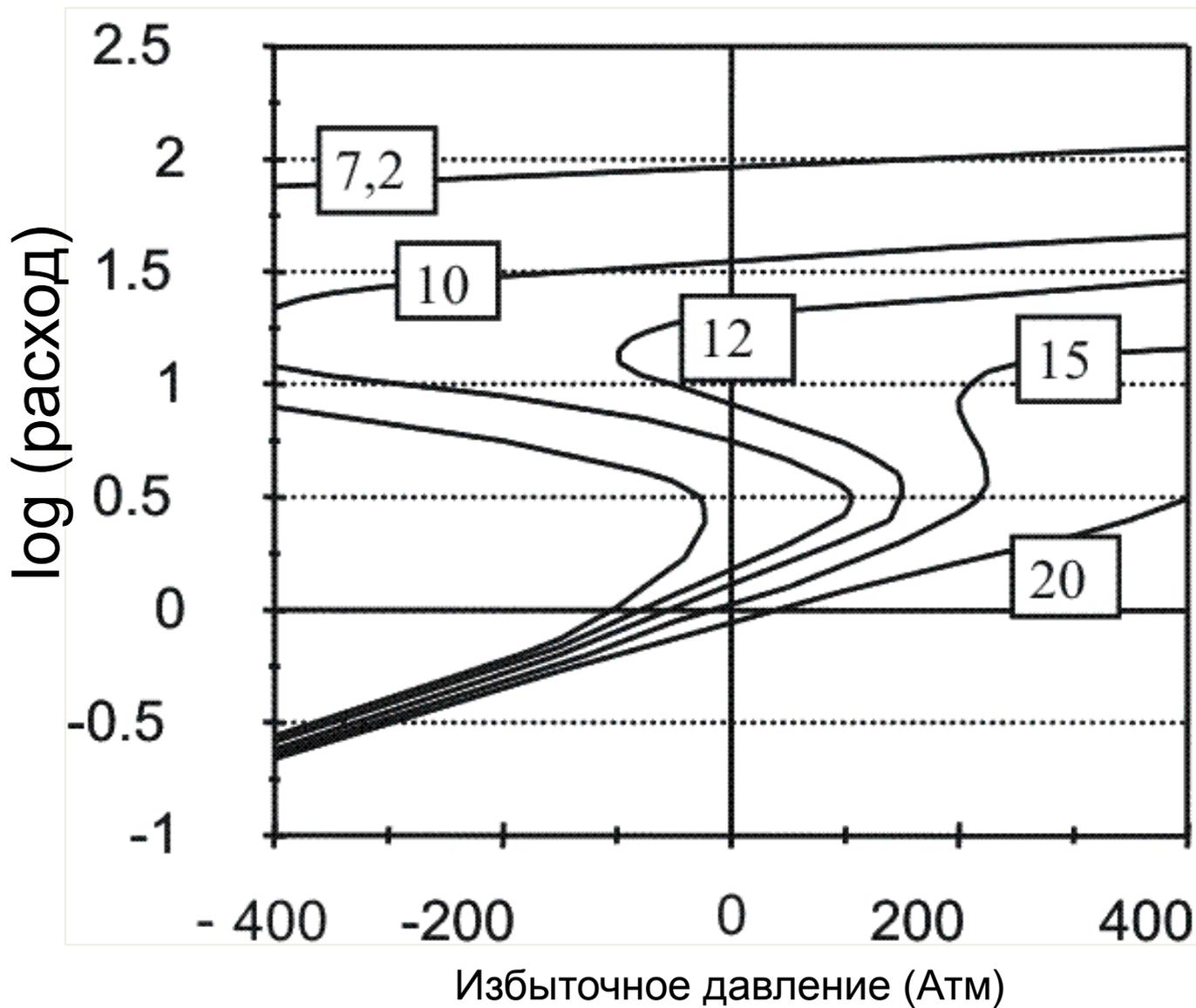
4. Когда концентрация «свободного» газа достигает 40% частички магмы перестают связываться друг с другом – **газовзвесь.**

3. В порах остается 70 % газа, «свободный» газ движется с большей скоростью – **разрушающаяся пена.**

2. До концентрации пузырьков 70% магма и газ движутся совместно – **пузырьковый режим**

1. При больших давлениях газ растворен в магме – **гомогенный режим.**

Зависимость расхода от давления



Слезин (1983)

Итак:

- Обсудили роль летучих в вулканических процессах
- Определили возможный механизм дегазации магмы при подъеме.
- Познакомились с методами описания многофазных сред.
- Узнали, куда летят вулканические бомбы.
- Рассмотрели модели взрывных извержений.