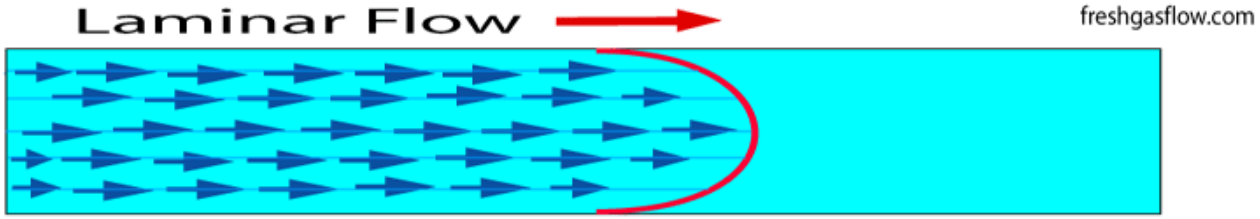
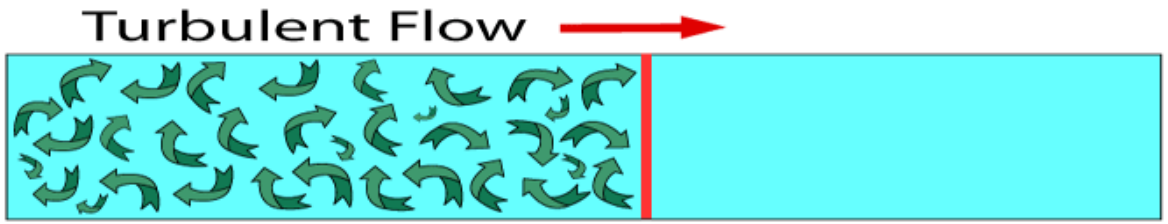
План лекции

- Ламинарные и турбулентные течения, число Рейнольдса
- Сила сопротивления канала вулкана.
- Летучие в магме. Растворимость, всплытие пузырей.
- Фильтрация газа. Закон Дарси. Дегазация магм
- Моделирование течения многофазных сред. Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Система уравнений, описывающая многофазное, многоскоростное течение.

Ламинарные и турбулентные течения

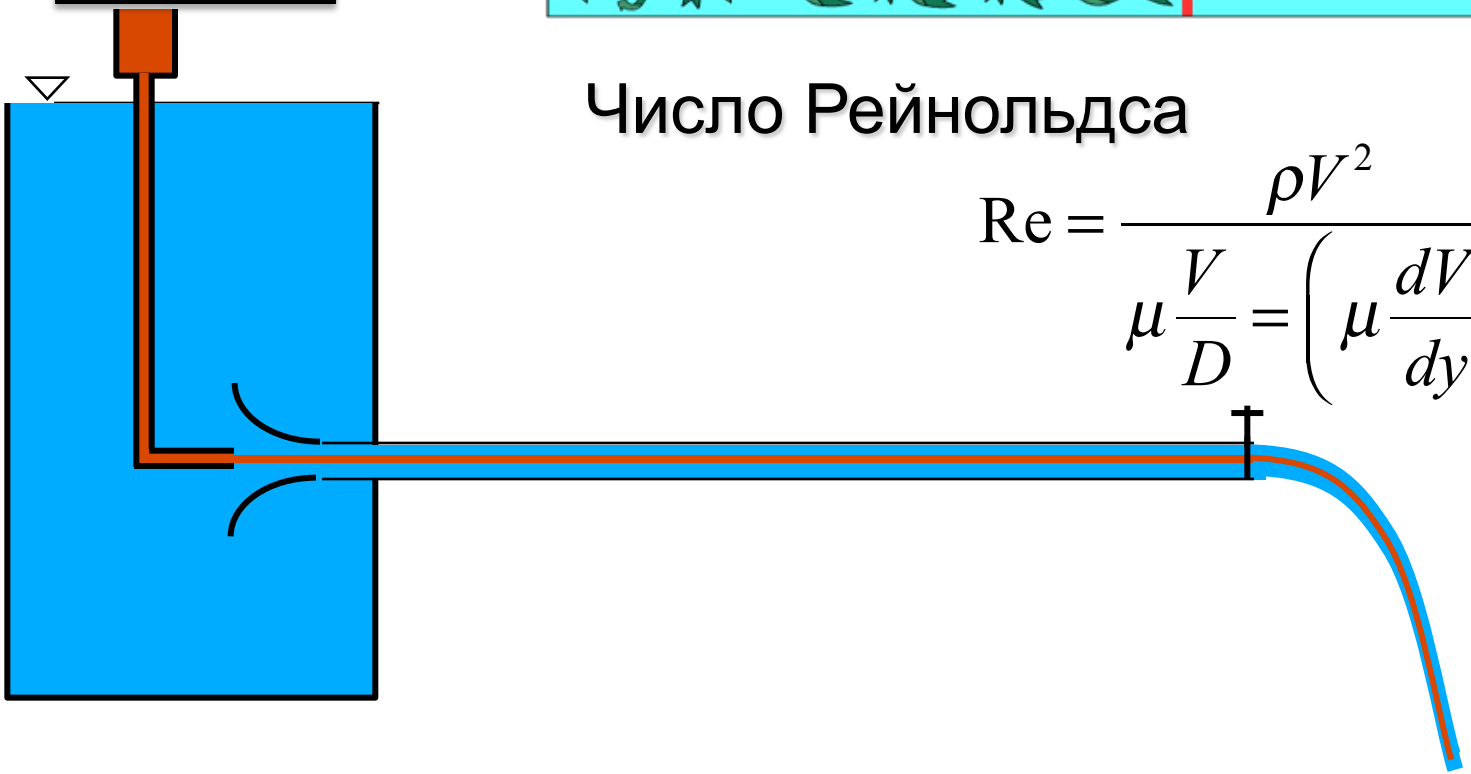
Osborne Reynolds
(1842 -1 912)





Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V^2}{\mu \dfrac{V}{D} = \left(\mu \dfrac{dV}{dy}\right)} = \frac{\rho V D}{\mu}$$



Что происходит под вулканом?

Движение магмы в канале

Критическое число Рейнольдса ~ 2000
Канал – 50 м
Вязкость 10^5 Па с
Скорость 1 м/с
Плотность 2500 кг/м^3

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{2500 * 1 * 50}{10^5} = 1.25$$

ДВИЖЕНИЕ ЛАМИНАРНО!

Для газовзвеси
Канал – 50 м
Вязкость 10^{-5} Па с
Скорость 100 м/с
Плотность 10 кг/м^3

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{10 * 100 * 50}{10^{-5}} = 5 \times 10^9$$

ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНО!

Сила и коэффициент сопротивления канала

- Перепишем уравнение в гидравлическом приближении

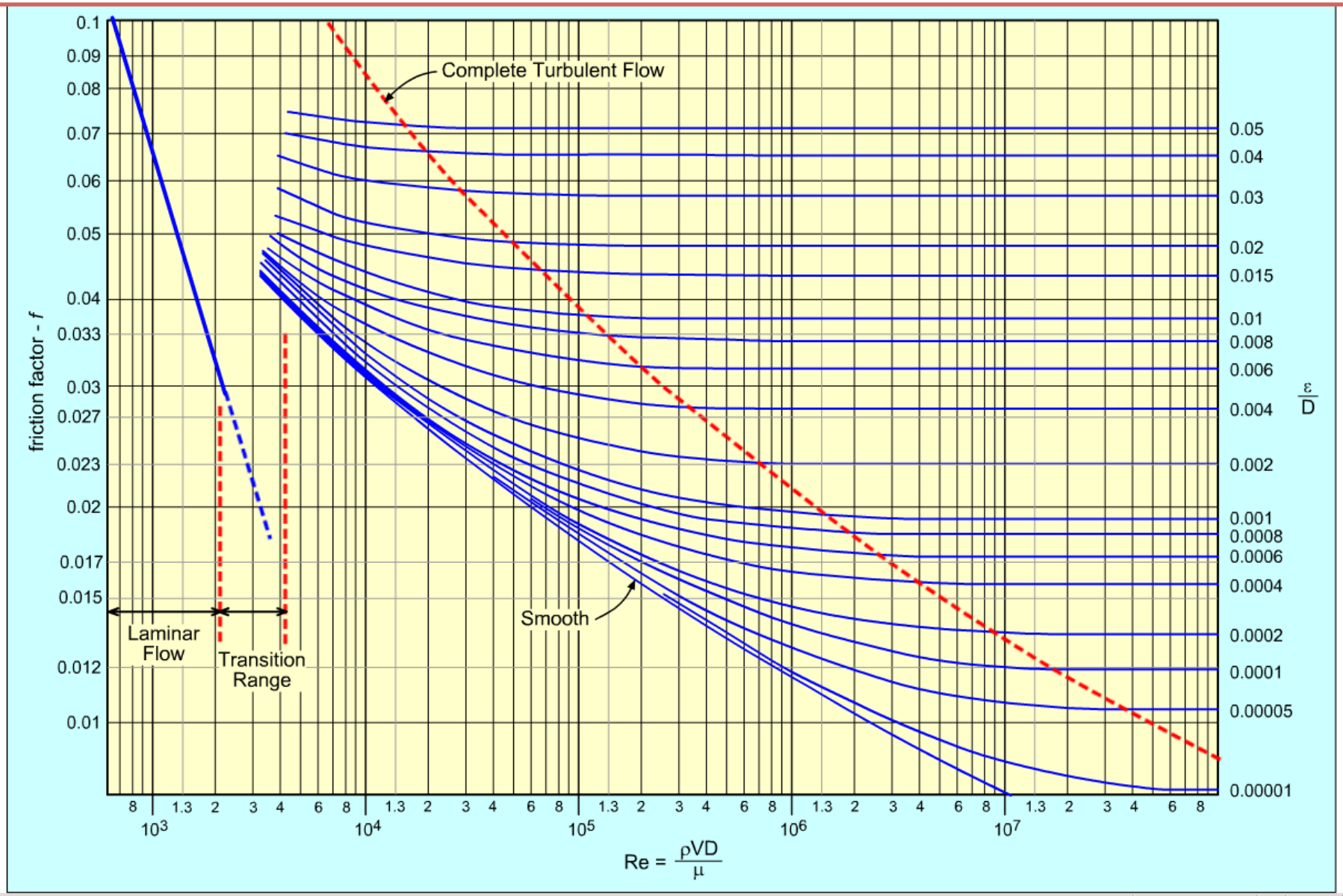
$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{dp}{dx} = -\frac{32\mu V_{av}}{D^2} = -\lambda \frac{\rho V_{av}^2}{2D}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V_{av} D}{\mu}; \qquad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

<u>Для турбулентного режима:</u>

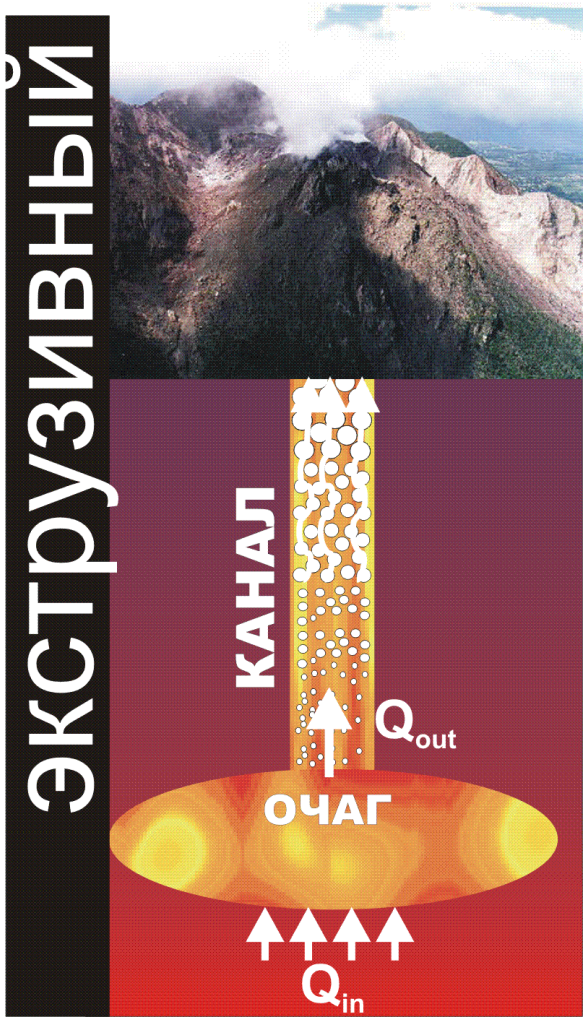
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left[\frac{2.51}{Re \times \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{D} \times 0.269\right]$$

Коэффициент сопротивления

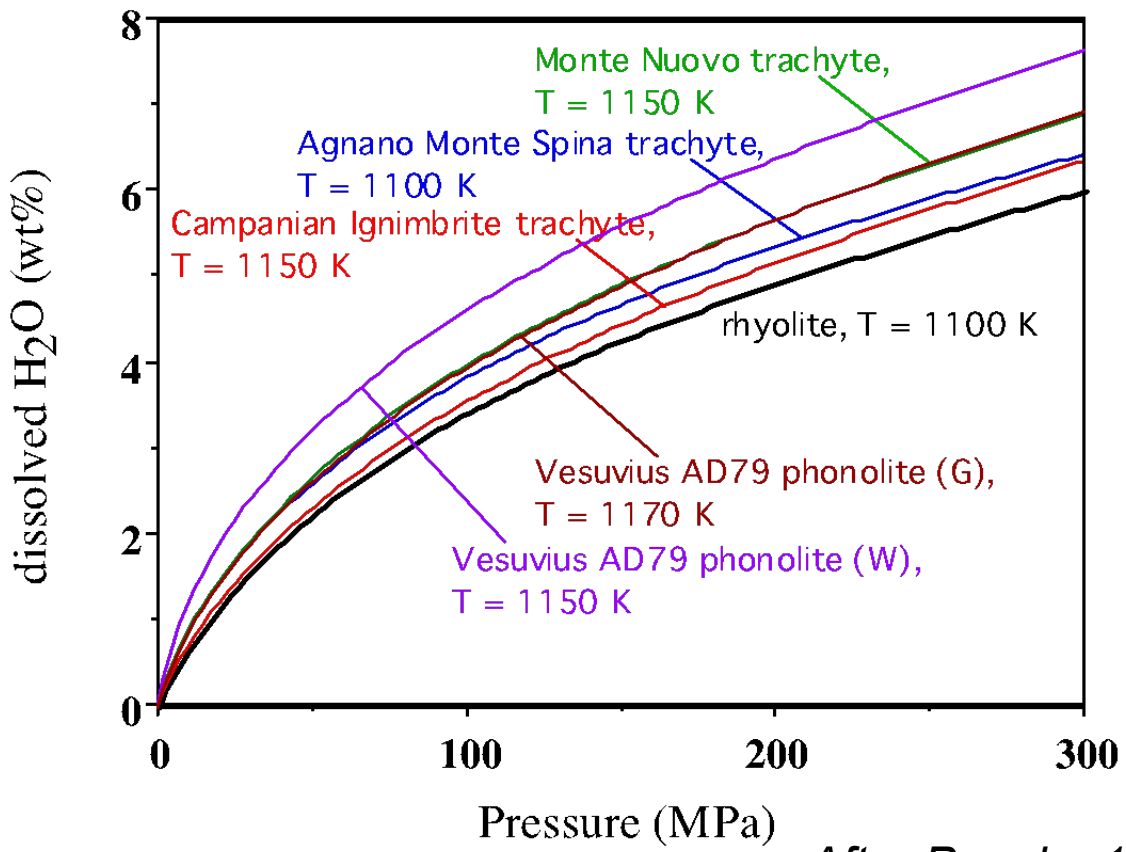


Готово
ecourses.ou.edu

Летучие в магме



Растворимость воды в силикатных расплавах



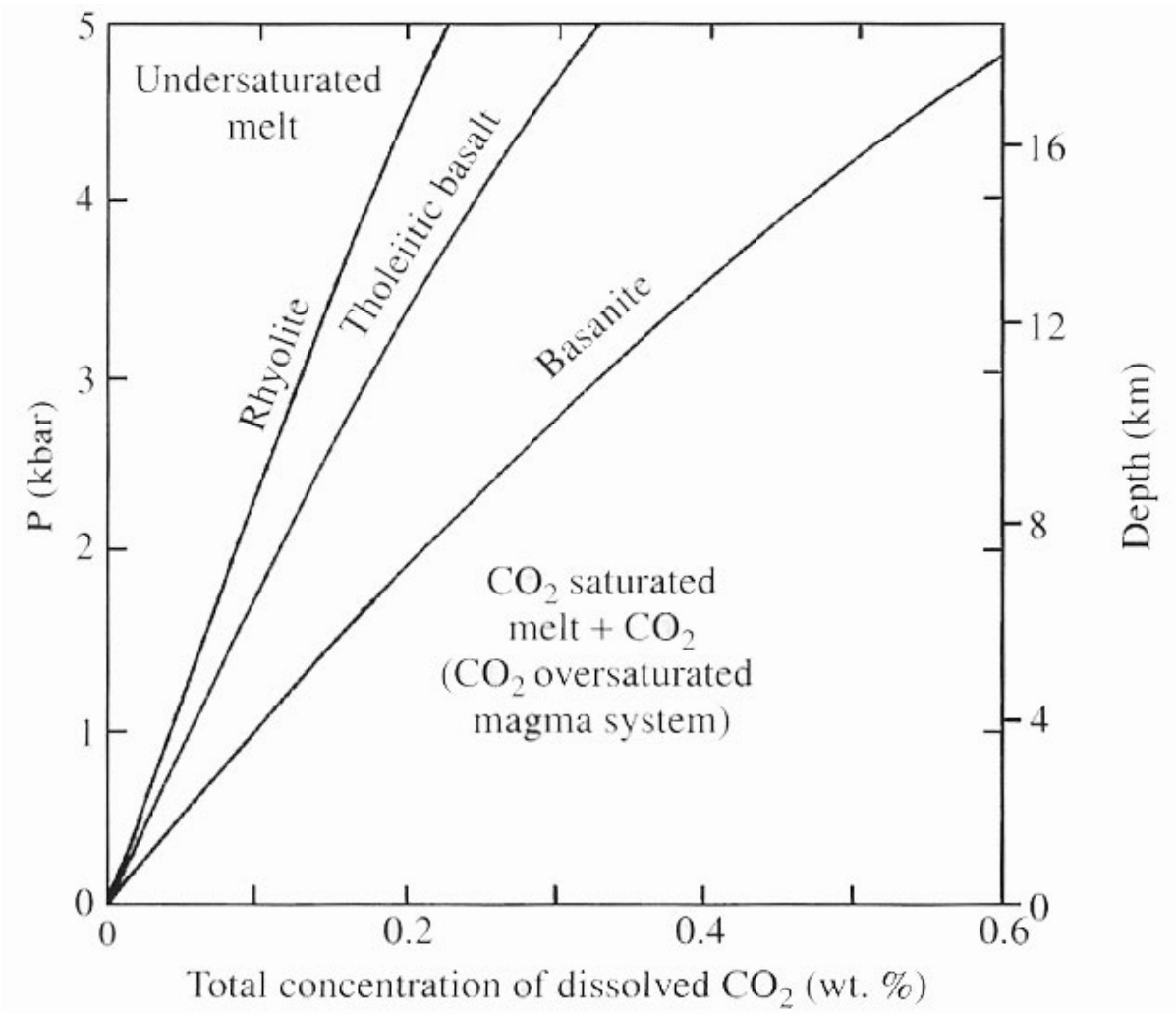
After Papale, 1997

$$C = kp^n$$

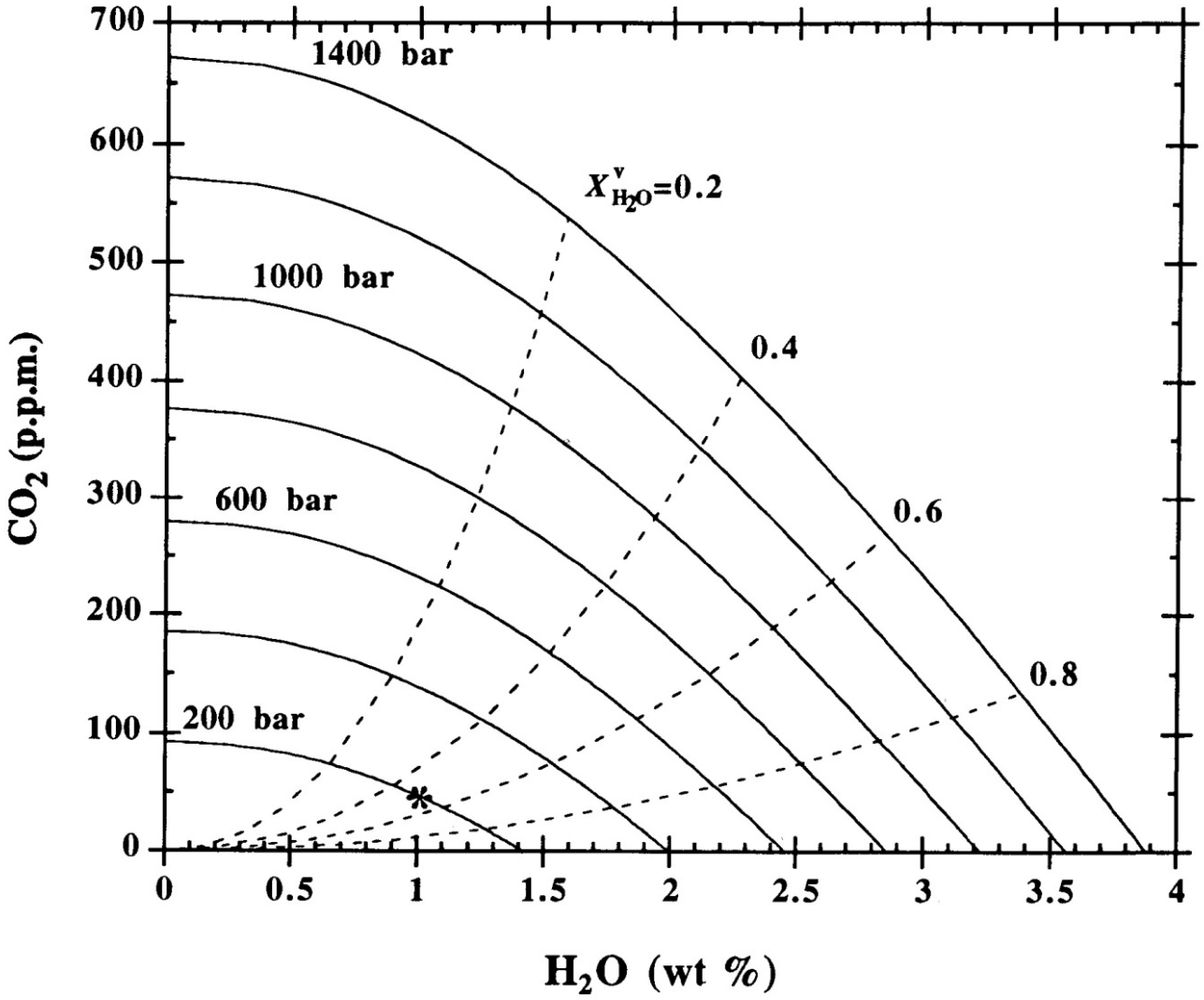
n~0.5,

k (состав)

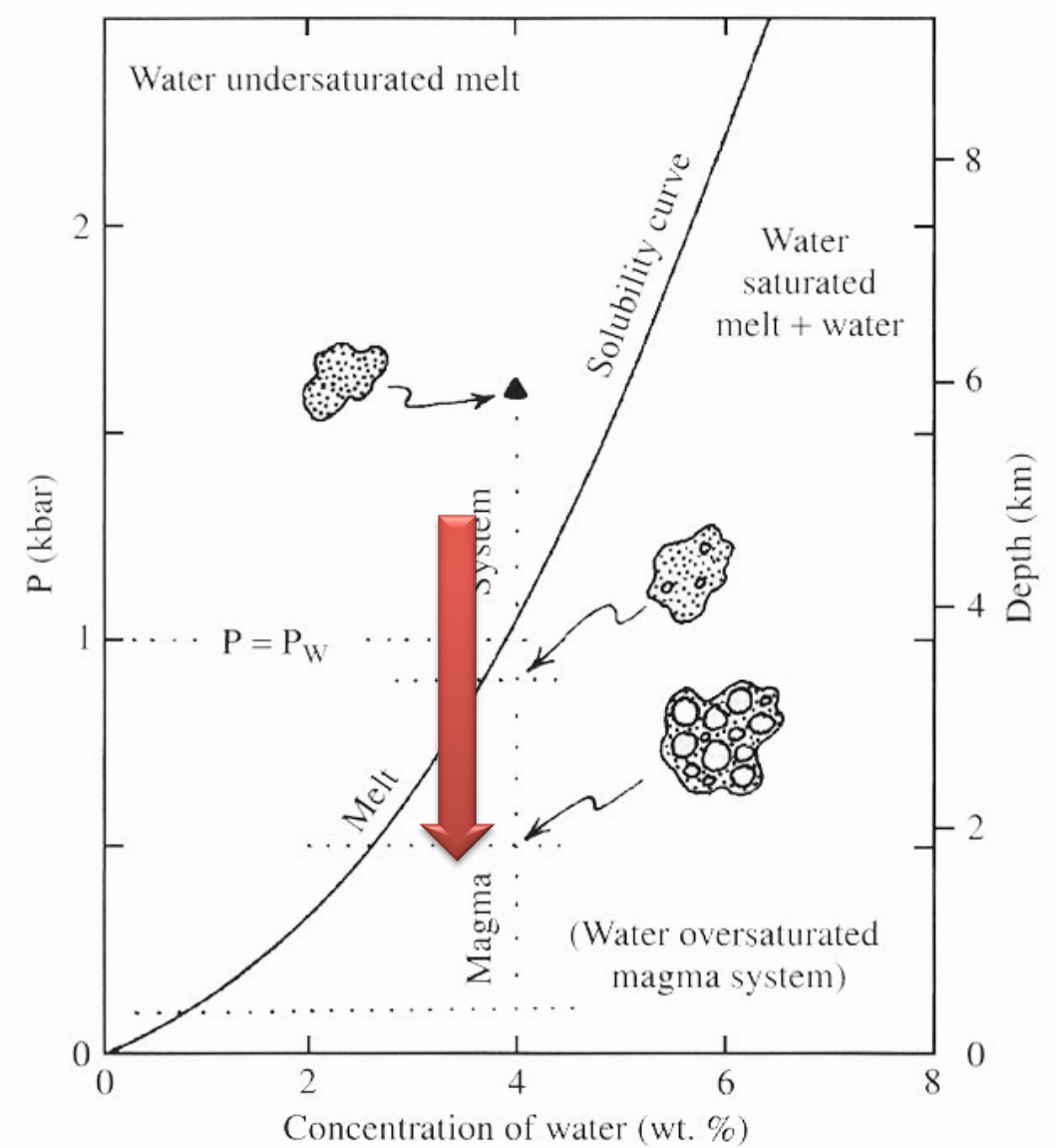
Растворимость CO_2



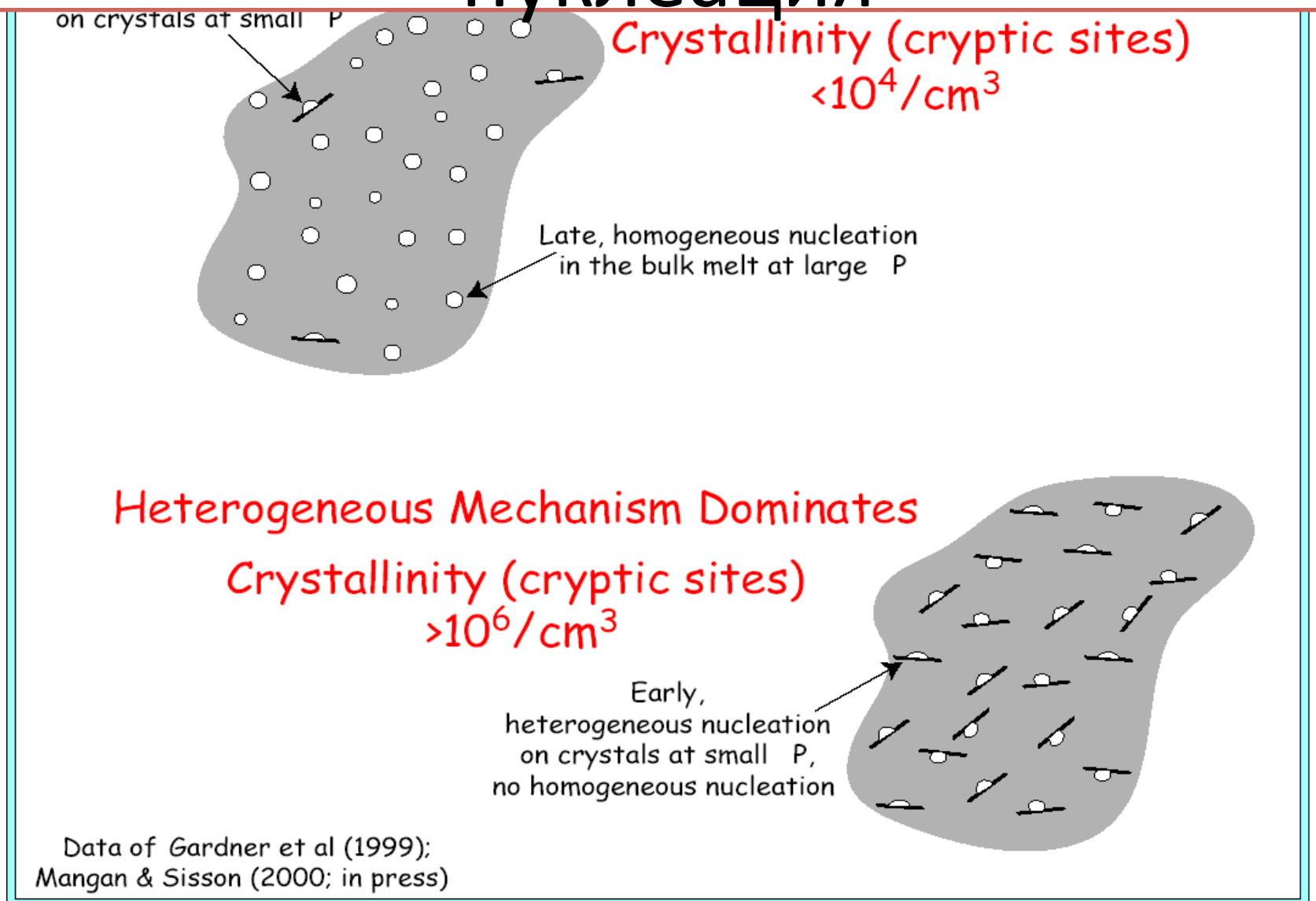
Система $H_2O + CO_2$



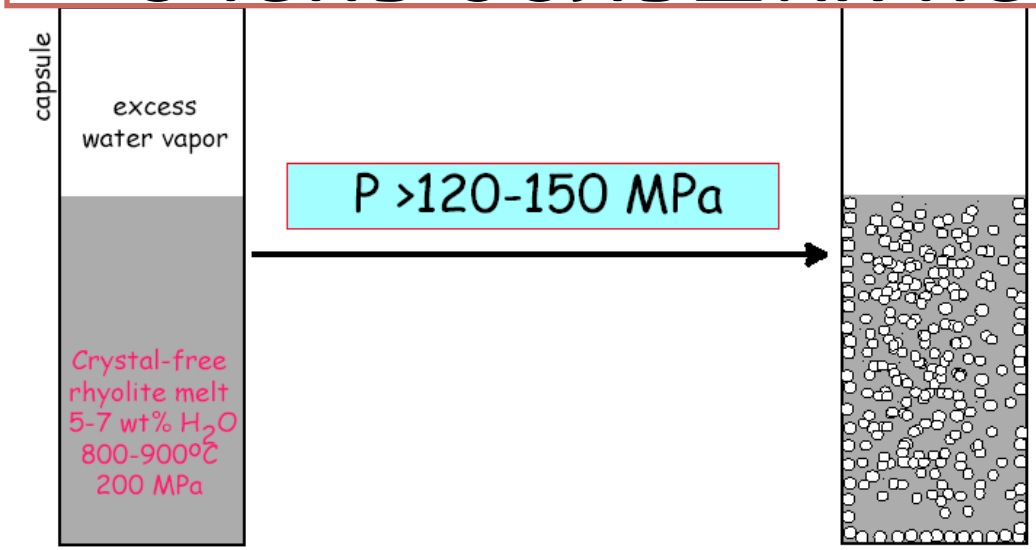
Нуклеация пузырьков



Гомогенная и гетерогенная нуклеация

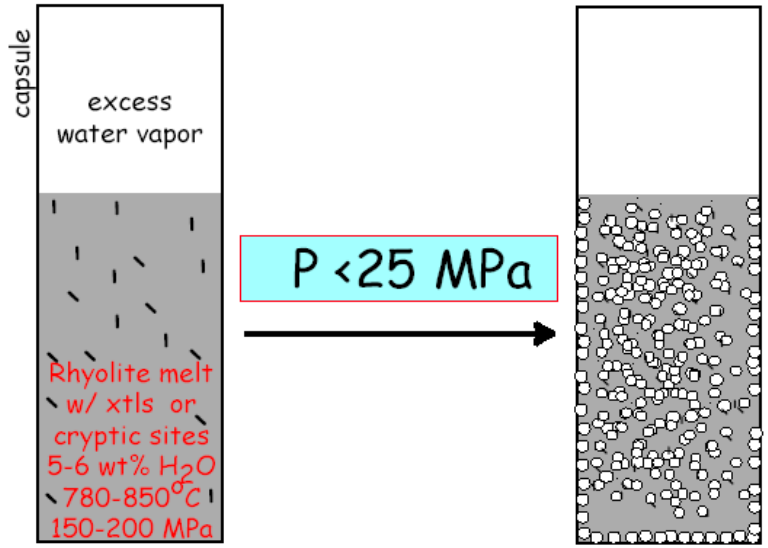


Гомогенная нуклеация требует очень больших пересыщений



Homogeneous nucleation triggered at wt% H_2O ~ 2X the equilibrium value

Mourtada-Bonnefoi & Laporte (
Mangan & Sisson (200

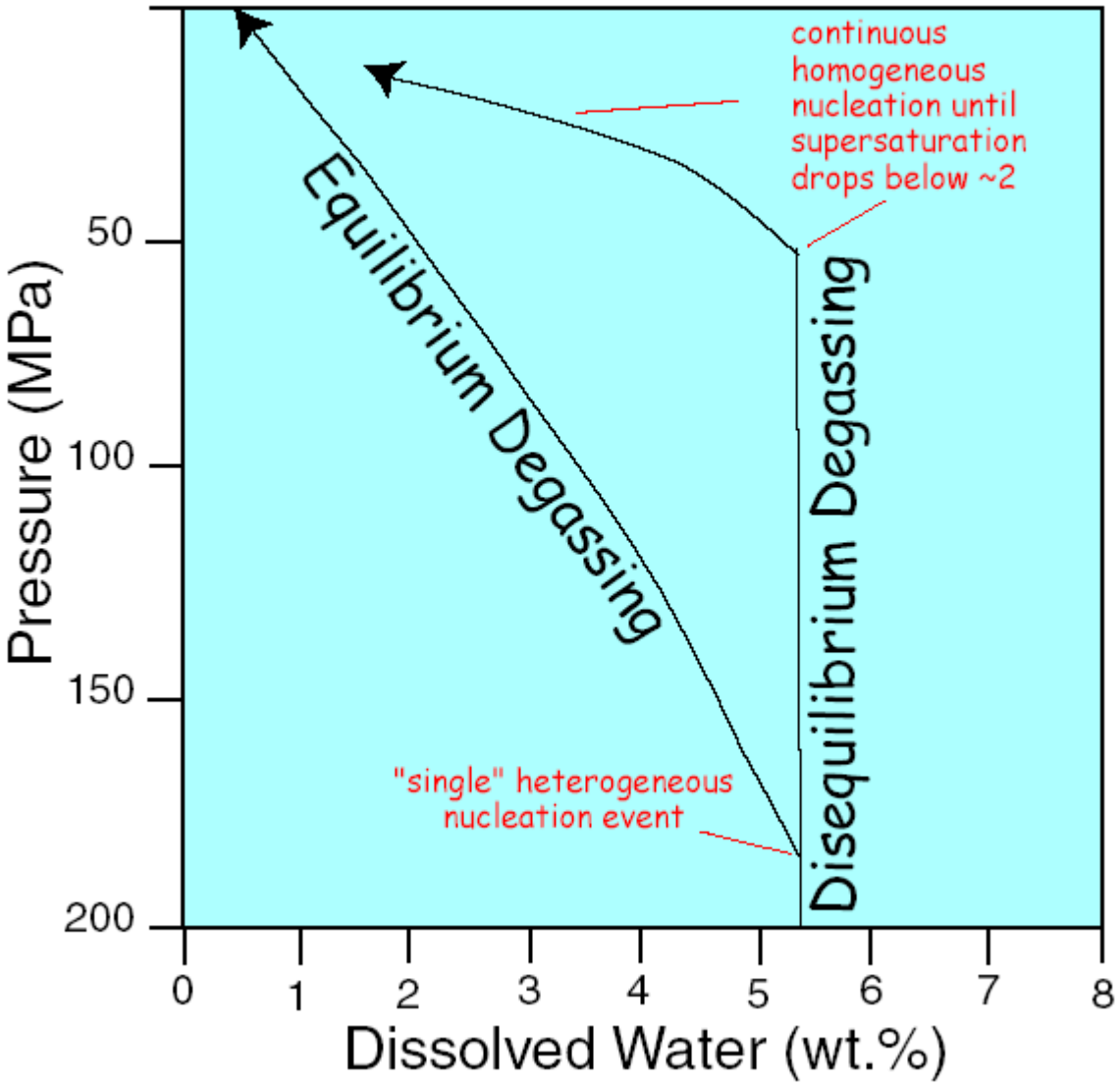


Heterogeneous nucleation triggered at wt% H_2O ~ 1.1X the equilibrium value

Hurwitz & Navon (1994)
Gardner et al (1999)
Mangan & Sisson (in press)

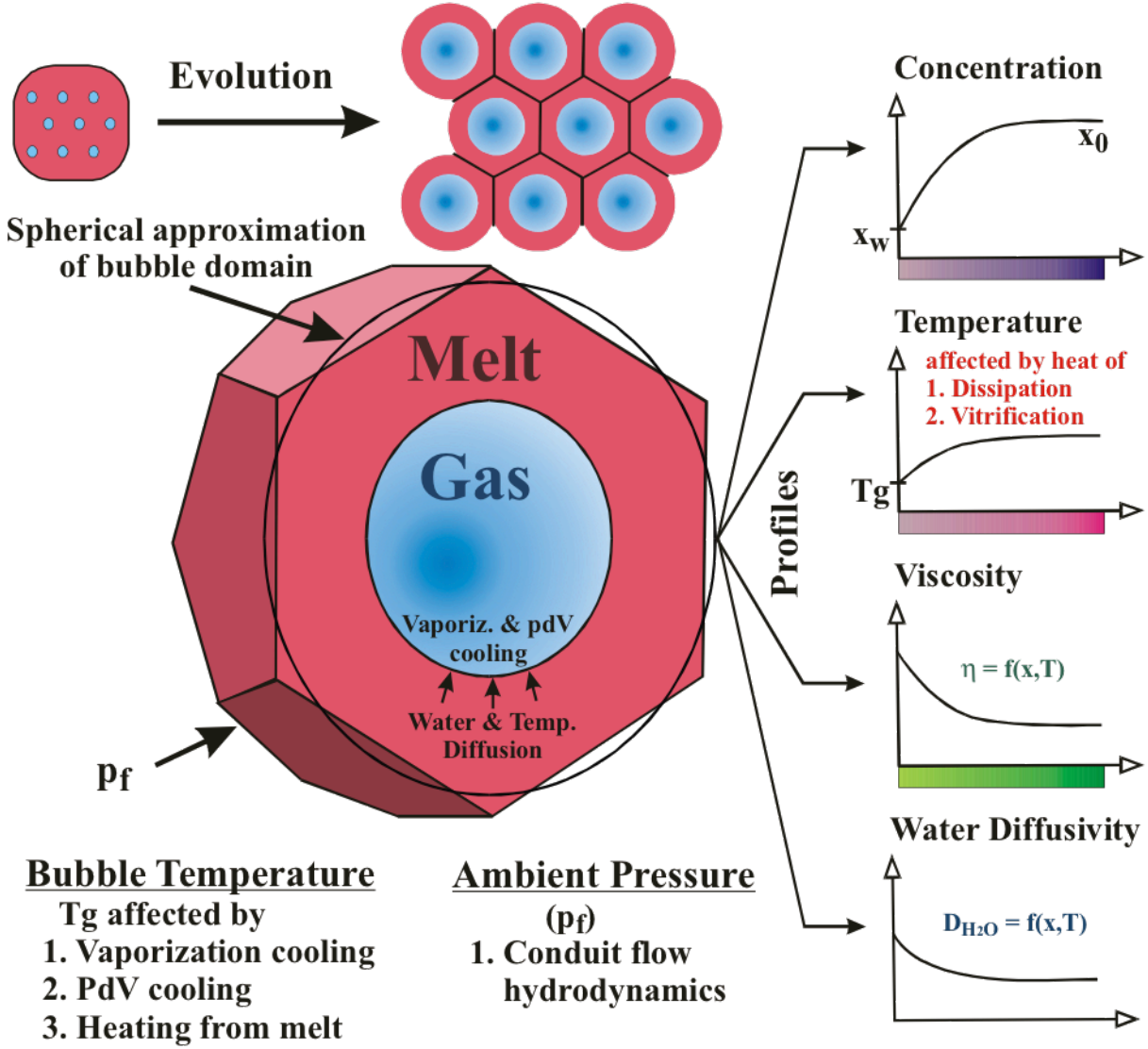
Margaret Mangan

Дегазация магмы



Диффузионный рост пузырька

Alex Proussevitch



Концентрация

$$\text{Концентрация} = \frac{\text{масса примеси}}{\text{масса смеси} \approx \text{масса жидкости}}$$

Концентрацию можно мерить как отношение масс или количества молекул

Закон Фика

Adolf Eugen Fick
(1829-1901)

$$\vec{\mathbf{J}}_D = -D\,\mathrm{grad}\left(C\right) = -D\left(\frac{\partial C}{\partial x}e_x, \frac{\partial C}{\partial y}e_y, \frac{\partial C}{\partial z}e_z\right)$$

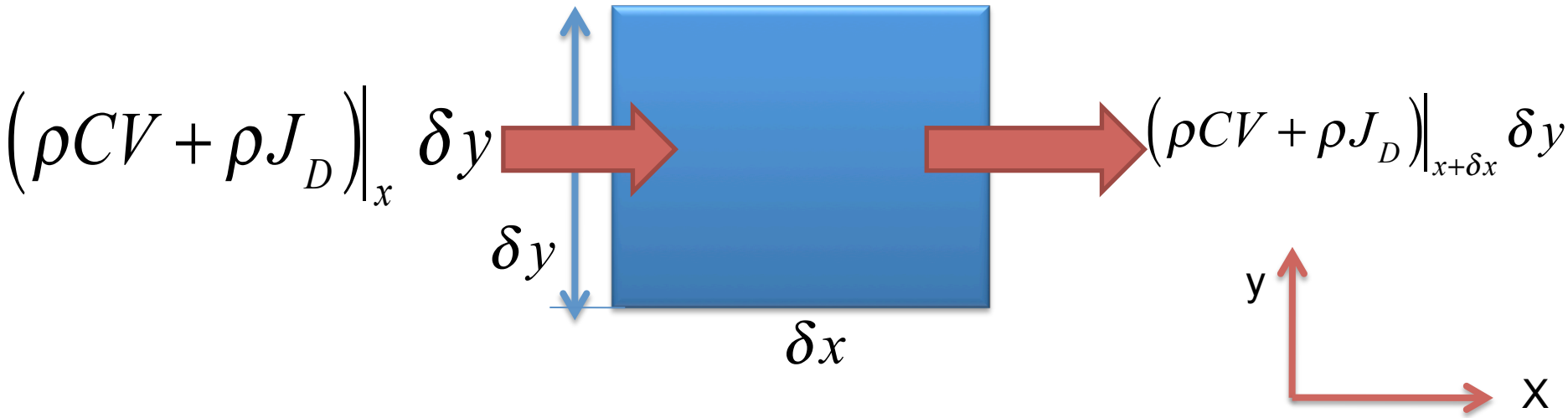
Изменение концентрации в неподвижной жидкости происходит за счет движения молекул из области большей концентрации в область меньшей

$$\mathbf{J}_D = -D\frac{\partial C}{\partial x}$$

В нашем одномерном мире

Закон сохранения массы примеси = уравнение диффузии

- Изменение массы примеси = приток примеси извне
- Изменение массы = $\frac{\partial}{\partial t} M_c = \frac{\partial}{\partial t}(\rho C \delta x \delta y) = \delta x \delta y \frac{\partial \rho C}{\partial t}$
- Притоки массы к граням:



Запишем закон сохранения массы примеси

$$\delta x \delta y \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\left(\rho CV + \rho J_D \right) \Big|_{x+\delta x} - \left(\rho VC + \rho J_D \right) \Big|_x \right) \delta y = 0$$

$$\delta x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho CV \Big|_x + \frac{\partial \rho CV}{\partial x} \delta x + \rho J_D \Big|_x + \frac{\partial J_D}{\partial x} - \rho V \Big|_x - \rho J_D \Big|_x = 0$$

После приведения подобных

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \frac{\partial (\rho CV)}{\partial x} + \frac{\partial \rho J_D}{\partial x} = 0$$

С учетом закона Фика

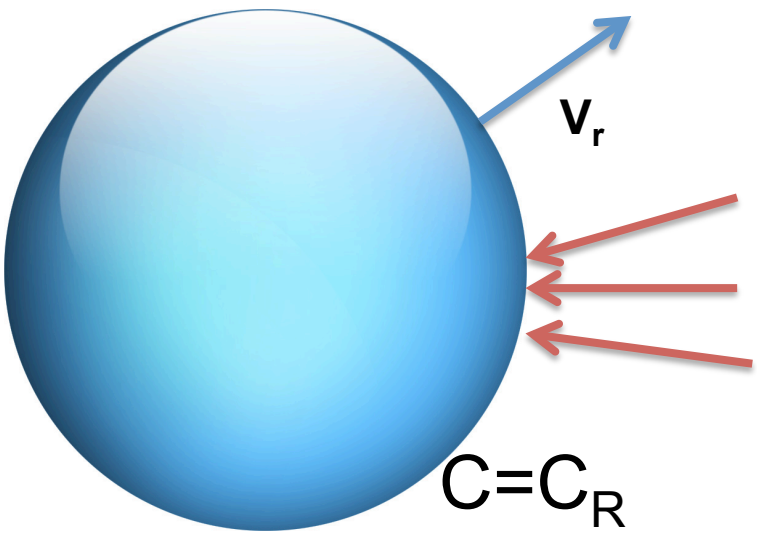
$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \frac{\partial (\rho C V)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho D \frac{\partial C}{\partial x} \right) = 0$$

Для постоянной плотности жидкости и коэффициента диффузии с учетом закона сохранения массы для жидкости

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Уравнение диффузии в сферических координатах

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(Dr^2 \frac{\partial C}{\partial r}\right)$$



$$J = -D\frac{\partial C}{\partial r}$$

$C=C_0$

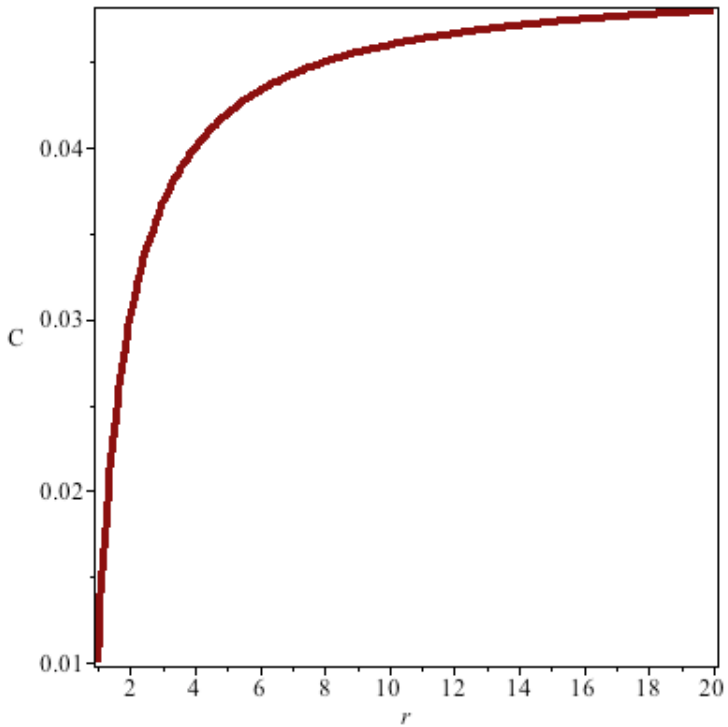
В случае большого коэффициента диффузии

Lyakhovsky, V., Hurwitz, S. & Navon, O. Bubble growth in rhyolitic melts: experimental and numerical investigation. Bull. Volcan. 58, 19–32 (1996).

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(Dr^2\frac{\partial C}{\partial r}\right)$$

$$C(r) = \frac{(-R+r)C_0 + C_r R}{r}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_R = \frac{C_0 - C_R}{R}$$



Закон сохранения массы для одного пузырька

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi\rho_g R^3\right) = 4\pi R^2 \rho_m D \left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=R} = 4\pi R^2 \rho_m D \frac{C_0 - C_R}{R}$$

Это уравнение можно проинтегрировать аналитически, когда все параметры, кроме радиуса не зависят от времени

$$R^2 = \frac{2D\rho_m\left(C_0 - C_R\right)}{\rho_g} t$$

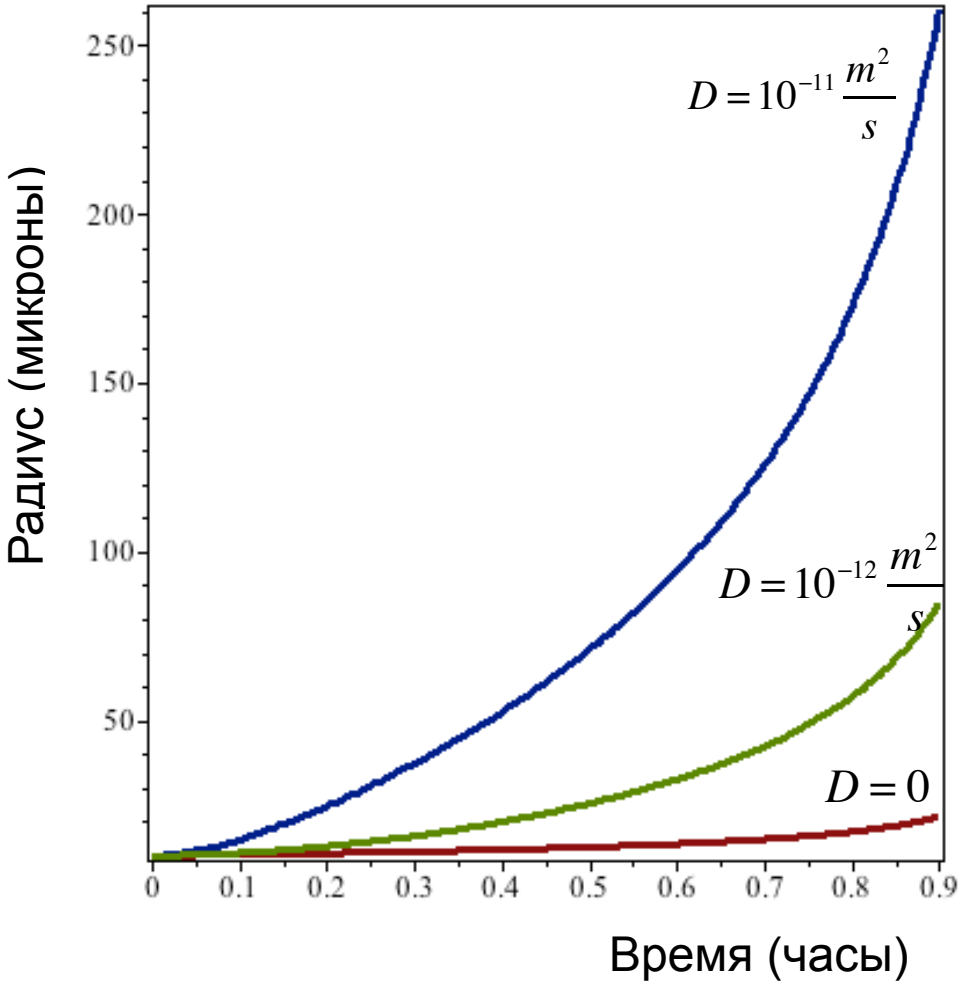
Поскольку: $\rho_g = \dfrac{p_2}{R_g T}; C_0 = k\sqrt{p_1}; C_R = k\sqrt{p_2}$

$$\boxed{R^2 = \frac{2DR_g T\rho_m k\left(\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}\right)}{p_2} t}$$

Подъем магмы

Давление в магме падает линейно по времени:

$$p = p_0 - \alpha t$$



При быстрой диффузии радиус пузырька растет гораздо быстрее

Миграция летучих в магме

Вулкан Эребус

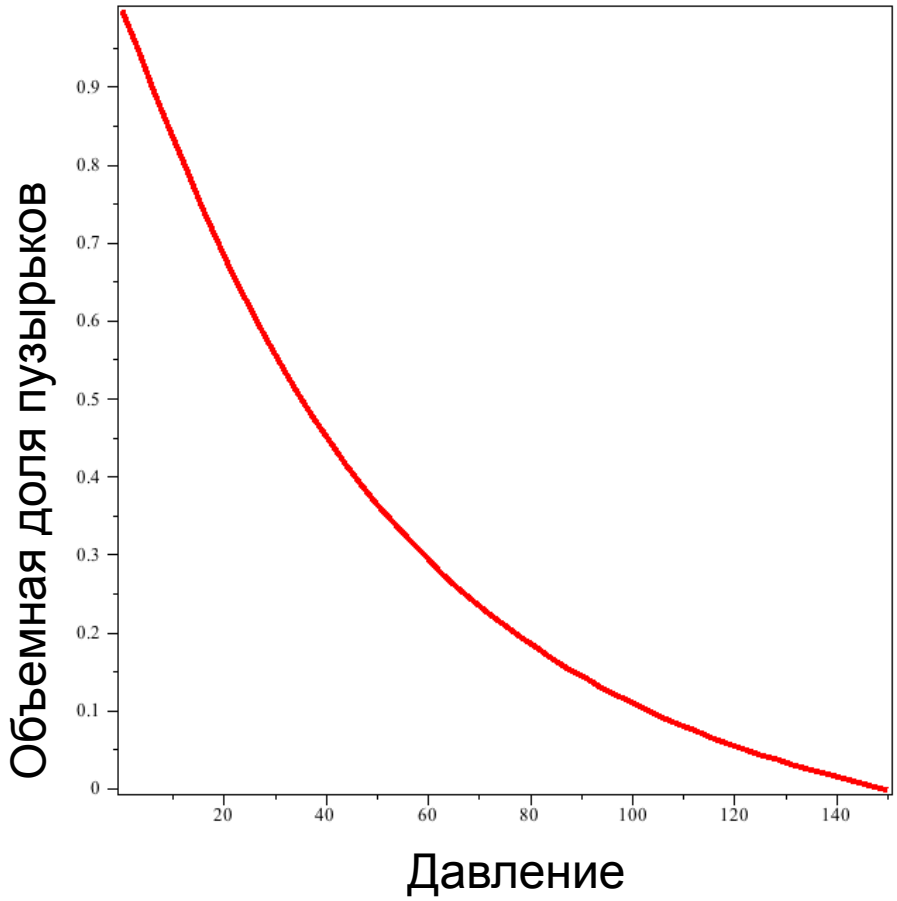
Если газ поднимается вместе с магмой.

Плотность магмы как функция массовой доли газа.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{C_0 - C}{\rho_g^0} + \frac{1-\left(C_0 - C\right)}{\rho_m^0}$$

$$C = k\sqrt{p};\ \rho_g^0 = \frac{p}{RT}; \rho_m^0 = const$$

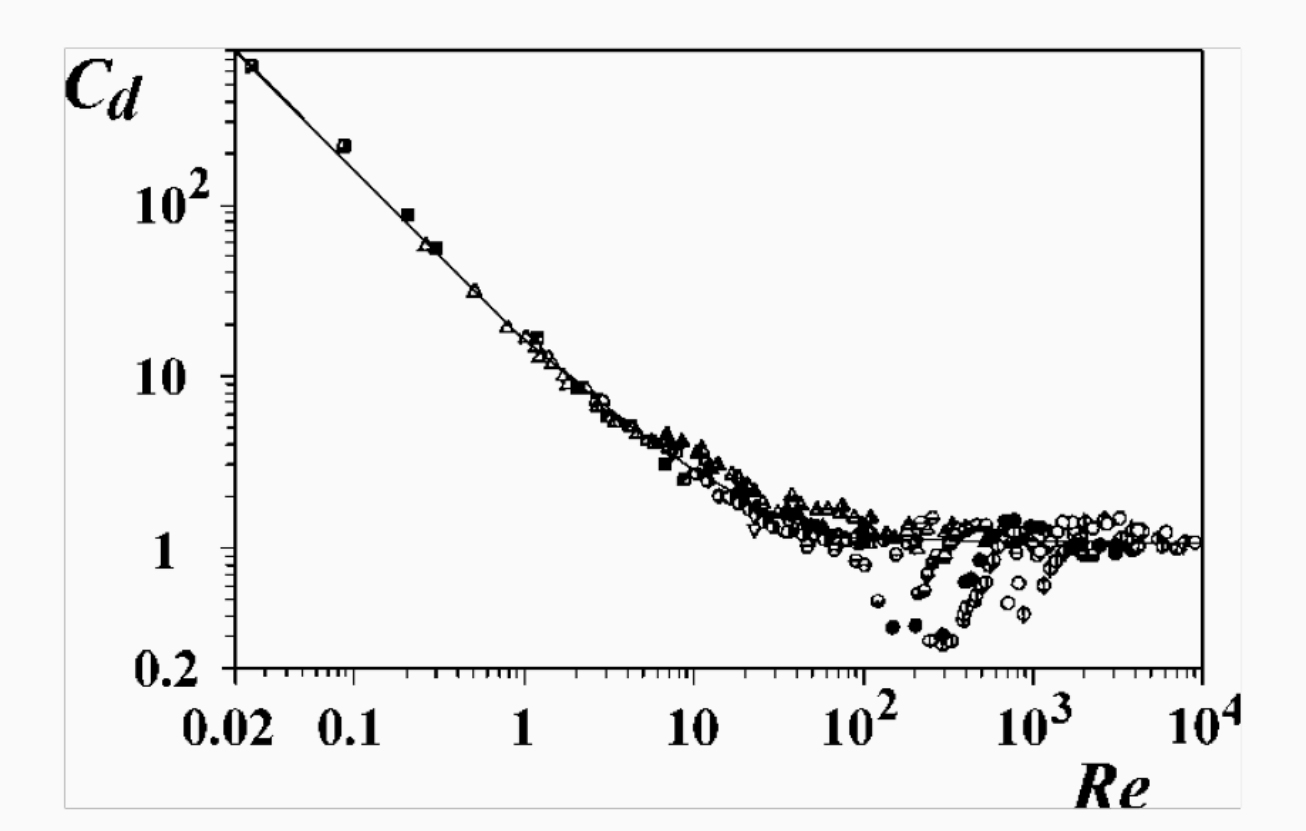
Если бы газ не двигался относительно магмы, то при атмосферном давлении она состояла бы на 99% из пузырьков!



Скорость всплывания одиночного пузырька

$$\mathrm{Re}_v = \frac{R\rho_l V}{\mu}$$

$$F = C_d \frac{\rho_l V^2}{R}$$



При малых числах Рейнольдса

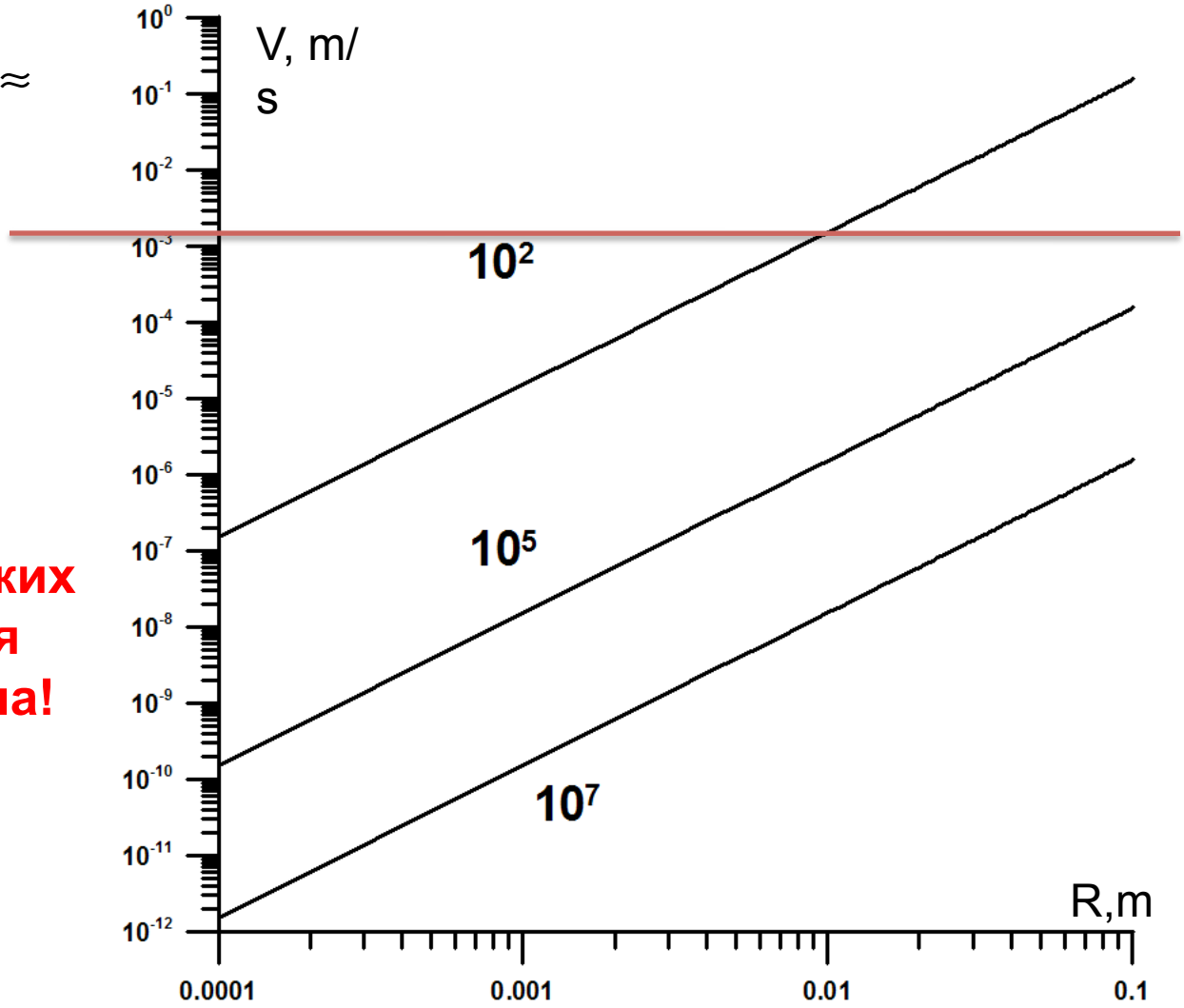
$$C_d = \frac{16}{\mathrm{Re}};\ \mathrm{Re} < 10$$

Скорость всплывания одиночного пузырька

$$F_A = \left(\rho_l - \rho_g\right) g = \frac{16}{\mathrm{Re}} \frac{\rho_l V^2}{R} = \frac{16\mu_l}{R^2} V = F_\mu$$

$$\rho_l \gg \rho_g \rightarrow V = \frac{\rho_l g R^2}{16\mu} \approx$$

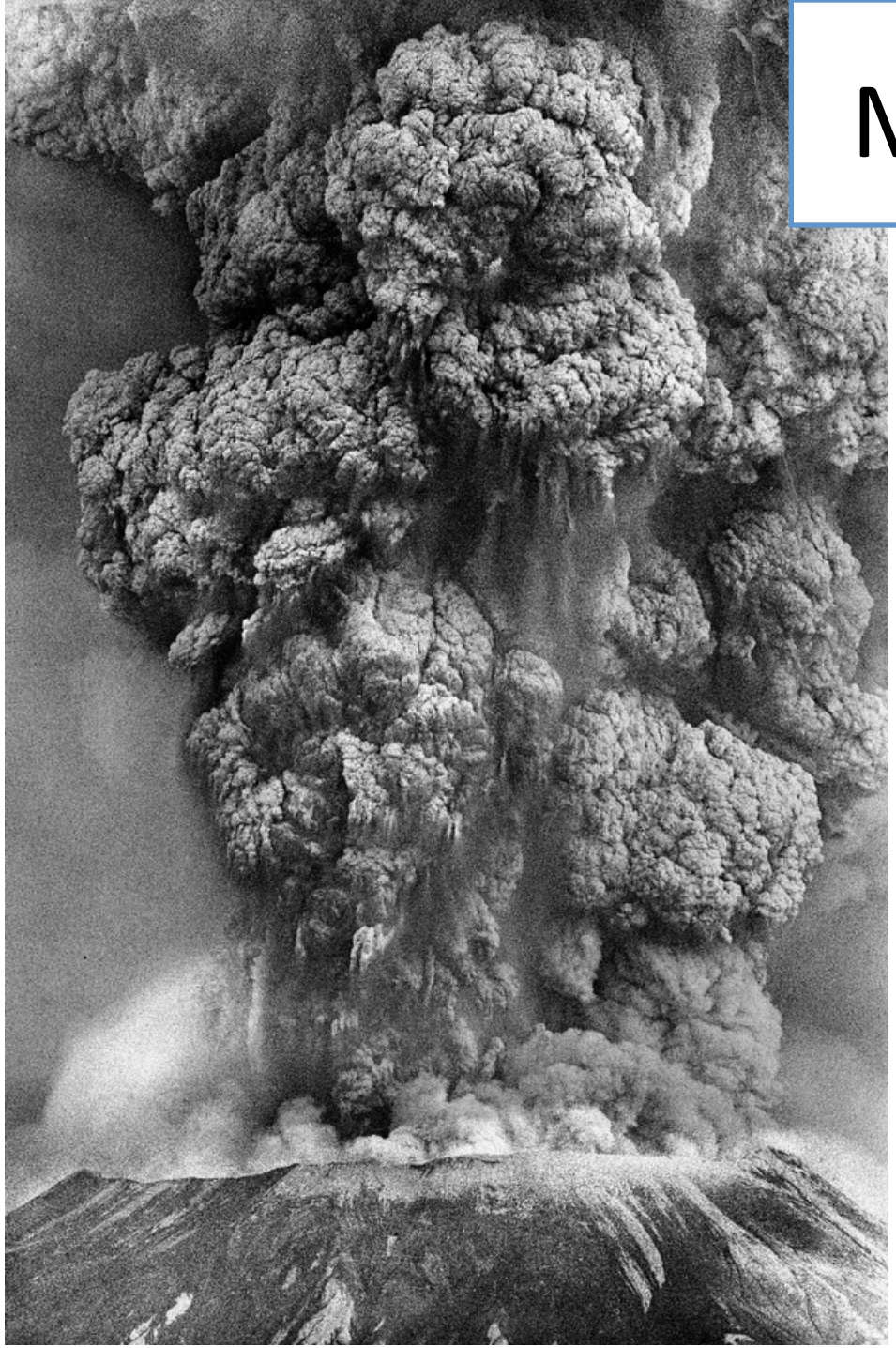
$$1530 \frac{R^2}{\mu}$$



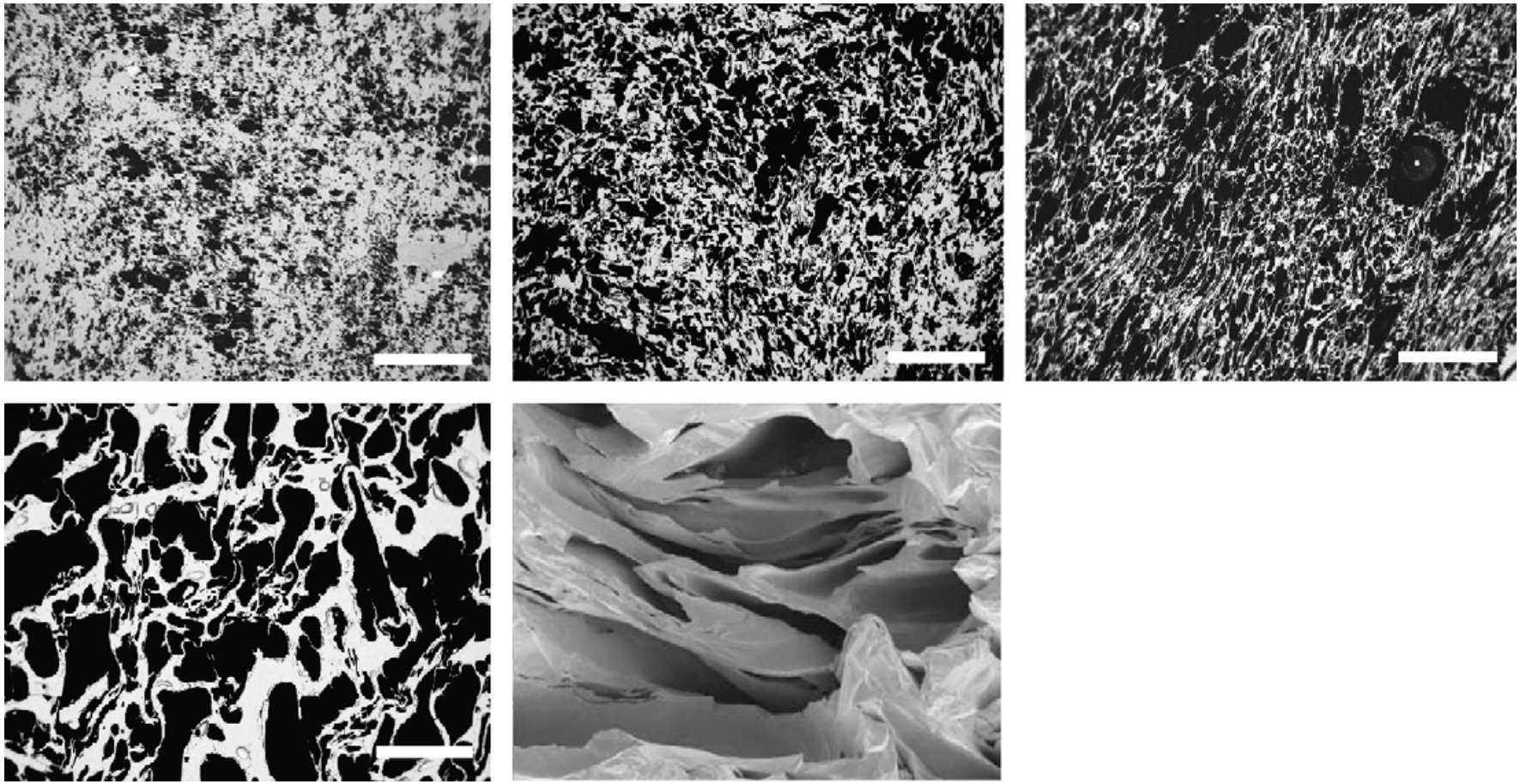
Дегазация высоковязких магм за счет всплытия пузырьков невозможна!

А как же лавовые купола?

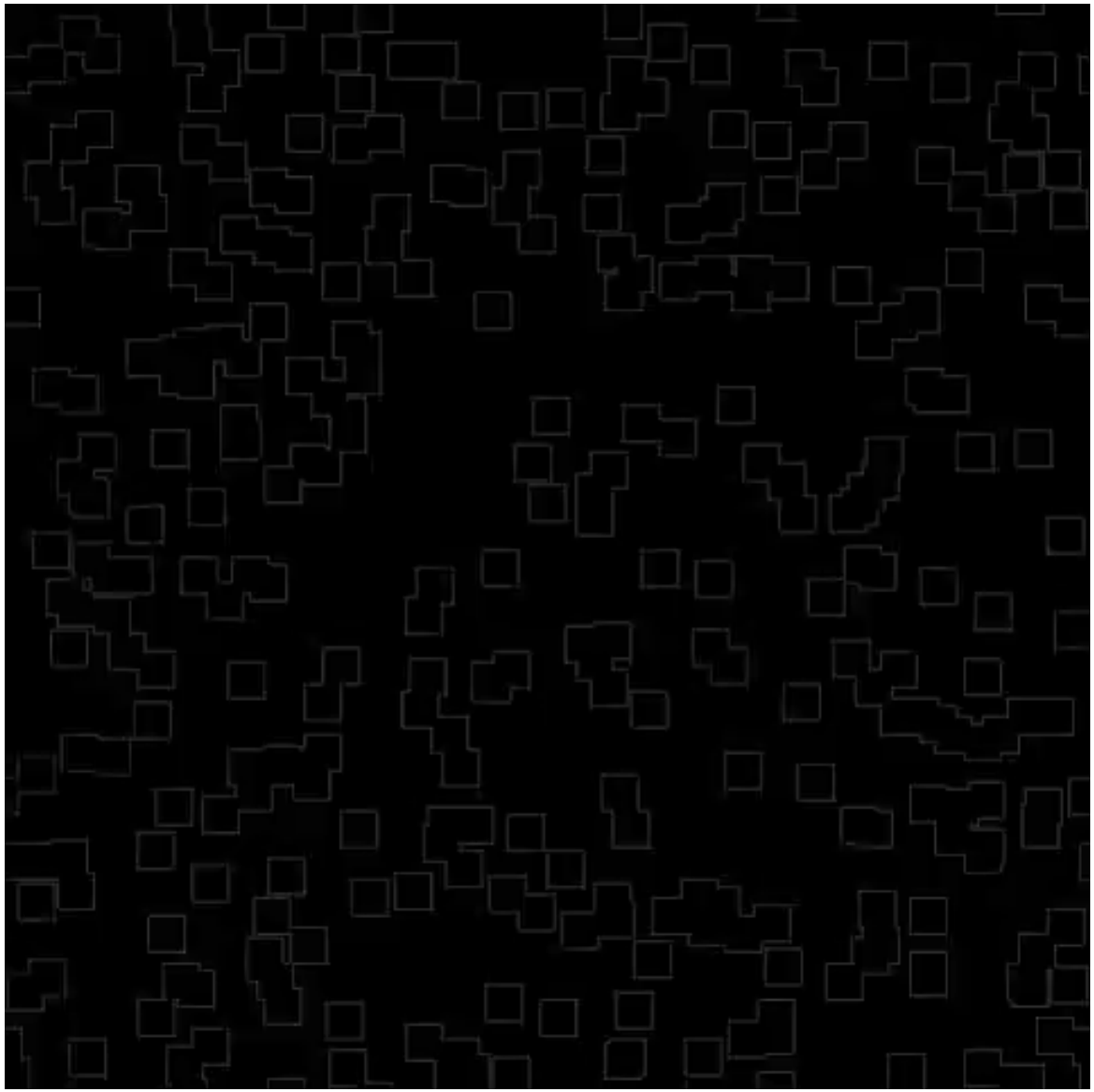
Маунт Сент Хеленс



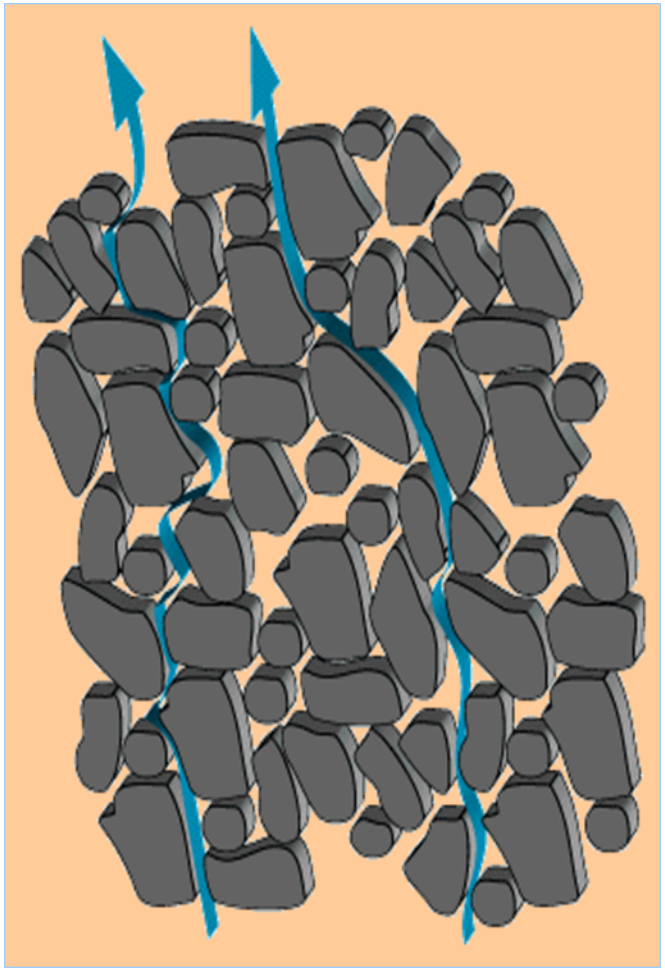
Пузырьки в магме не сферические и не изолированные



Фильтрация



Закон Дарси



Проницаемая пористая среда, газ занимает объем α

<u>Закон Дарси</u>

$$\vec{U}_g = -\frac{k(\alpha)}{\mu_g} grad(P);$$

$$grad(P) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x, \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y, \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z \right)$$

Henry Darcy

Аналог между течениями Дарси и Пуазейля

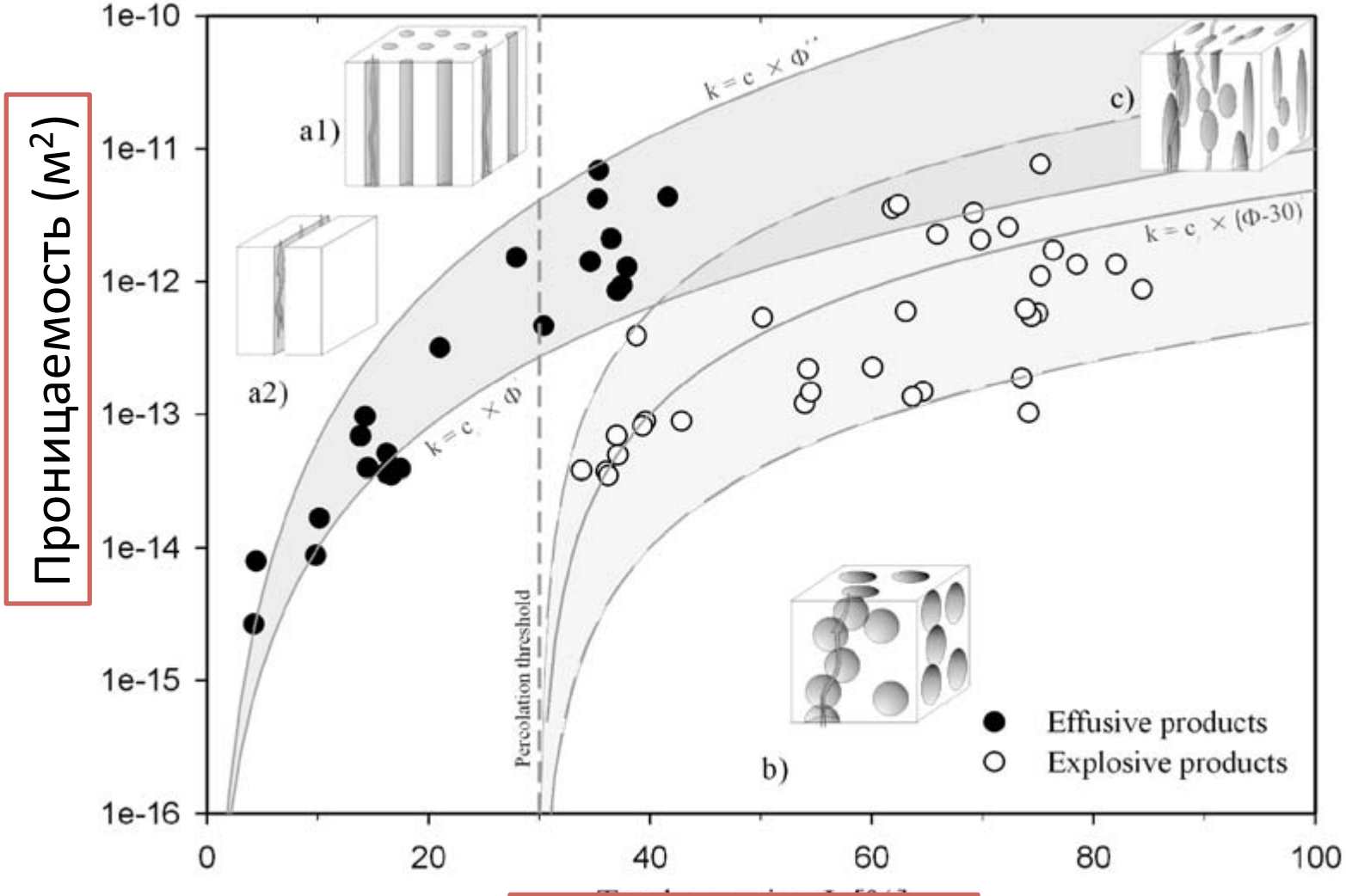
Представим пористую среду как набор параллельных труб, диаметра D. Тогда:

$$U = \alpha V = -\alpha \frac{D^2}{32\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

Отсюда следует

$$k = \alpha \frac{D^2}{32}$$

Зависимость проницаемости от пористости



Оценки для скорости фильтрации газа.

$$\frac{dp}{dx} = -\rho(1-\alpha)g - 32\frac{\mu V}{D^2} =$$

$$= -2500*0.5*9.8 - 32\frac{10^7 10^{-3}}{30^2} = -12605\frac{\text{Pa}}{m}$$

Оценим скорость движения газа сквозь магму

$$\frac{V_g - V}{V} = -\frac{k(\alpha)}{\alpha\mu_g V}\frac{dp}{dx} = \frac{12605*10^{-12}}{0.5*10^{-5}10^{-3}} \approx 2.5$$

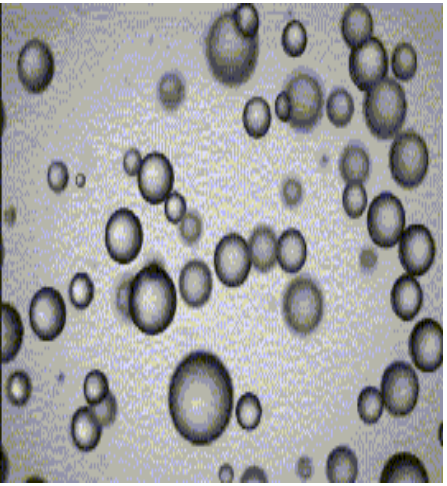
Газ движется в 2.5 раза быстрее магмы! Дегазация возможна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД.

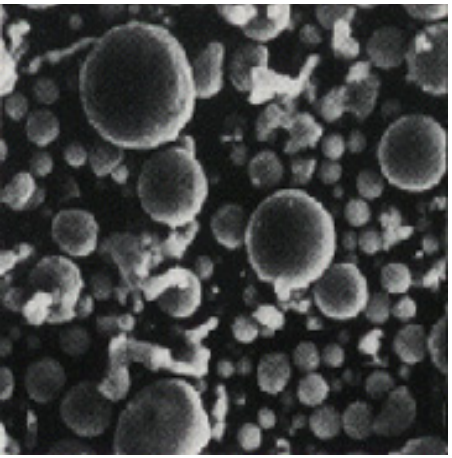
- Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Модели взаимодействия между фазами

Описание дисперсных систем

пузырьки



частицы



Параметры многофазных сред

Приведенная плотность $= \dfrac{m_i}{\Omega_{mixture}} = \rho_i$

Истинная плотность $= \dfrac{m_i}{\Omega_i} = \rho_i^0$

Объемная доля $= \dfrac{\Omega_i}{\Omega_{mixture}} = \alpha_i$

Массовая доля $= \dfrac{m_i}{m_{mixture}} = X_i$

$$\Omega_{mixture} = \sum \Omega_i; \; m_{mixture} = \sum m_i$$

Параметры смеси

$$\frac{\sum m_{ij} V_{ij}}{m_i} = V_i$$

Скорость отдельной фазы

$$\frac{\sum \rho_i V_i}{\rho_{mixture}} = V$$

Среднемассовая скорость смеси

$$\rho_{mixture} = \sum \rho_i$$

Уравнения неразрывности **+ Потоки массы**

Уравнения импульса **+ Силовое взаимодействие**

Плотность двухфазной среды

$$\rho = \left(1-\alpha\right)\rho_l^0 + \alpha\rho_g^0$$

Через объемную долю газа

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x_g}{\rho_g} + \frac{1-x_g}{\rho_l}$$

Через массовую долю газа

Структура уравнений для двухфазной смеси (1D)

$$\frac{\partial \rho_g^0 \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 \alpha V_g}{\partial x} = J_{\lg}; \quad \frac{\partial \rho_l^0 (1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l^0 (1-\alpha) V_l}{\partial x} = -J_{\lg};$$

$$\rho_g^0 \alpha \left(\frac{\partial V_g}{\partial t} + V_g \frac{\partial V_g}{\partial x} \right) = -\alpha \frac{\partial p_g}{\partial x} - F_{gl} + g_g + \ldots$$

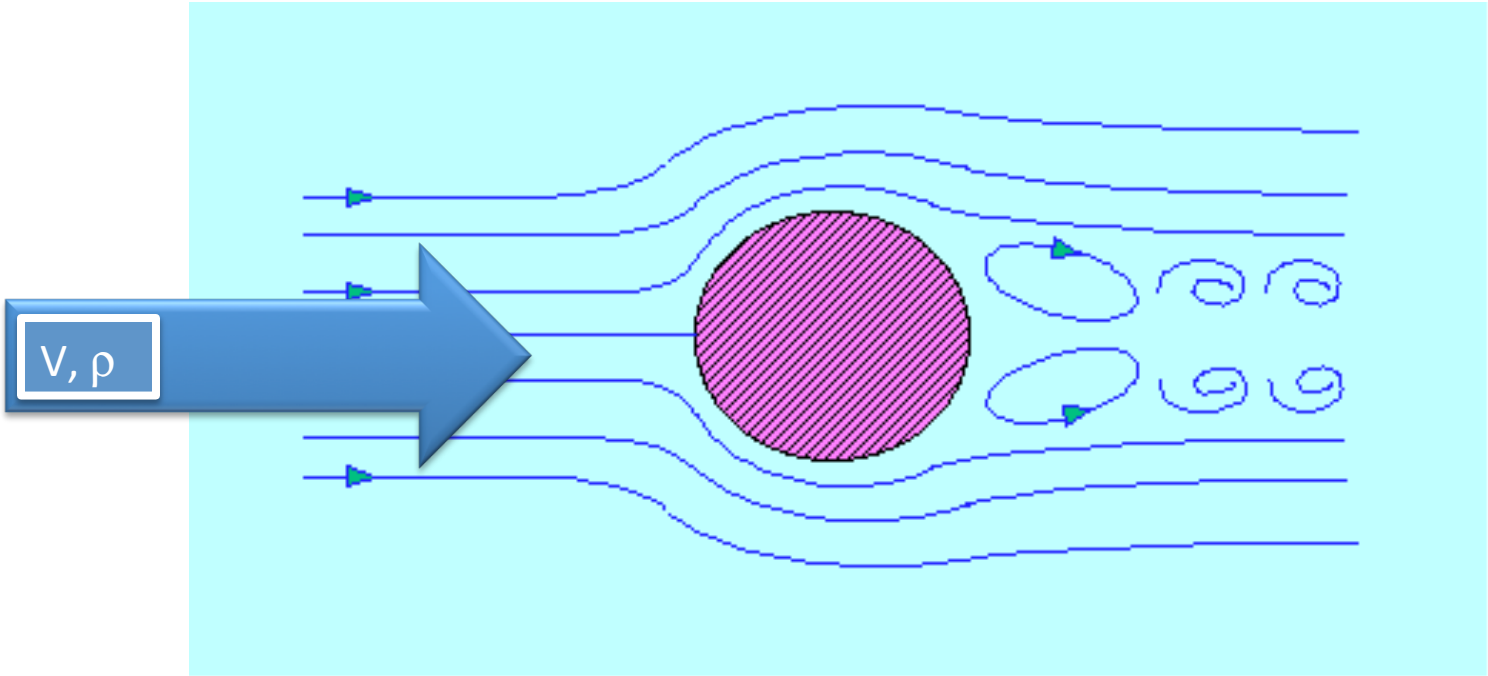
$$\rho_l^0 (1-\alpha) \left(\frac{\partial V_l}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_l}{\partial x} \right) = -(1-\alpha) \frac{\partial p_l}{\partial x} + F_{gl} + g_l + \ldots$$

$$\rho_l^0 = const; \quad \rho_g^0 = \frac{p_g}{R_g T}$$

Итак:

- Узнали от чего зависит режим течения жидкости
- Обсудили роль летучих в вулканических процессах
- Определили возможный механизм дегазации магмы при подъеме.
- Познакомились с методами описания мгогофазных сред.

Обтекание сферической частицы



За счет разности скоростей фаз происходит обтекание частиц или пузырьков, порождающее силы

СИЛЫ МЕЖФАЗНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Сила и коэффициент сопротивления

Полная сила, действующая на F_d частицу

$$F_d = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\mathrm{Re}_p = \frac{d_p V \rho}{\mu}$$

Коэффициент сопротивления

Площадь миделева сечения = $\pi d_p^2/4$

(1) $\mathrm{Re}_p < 2$, ламинарное (Закон Стокса)

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}_p}$$

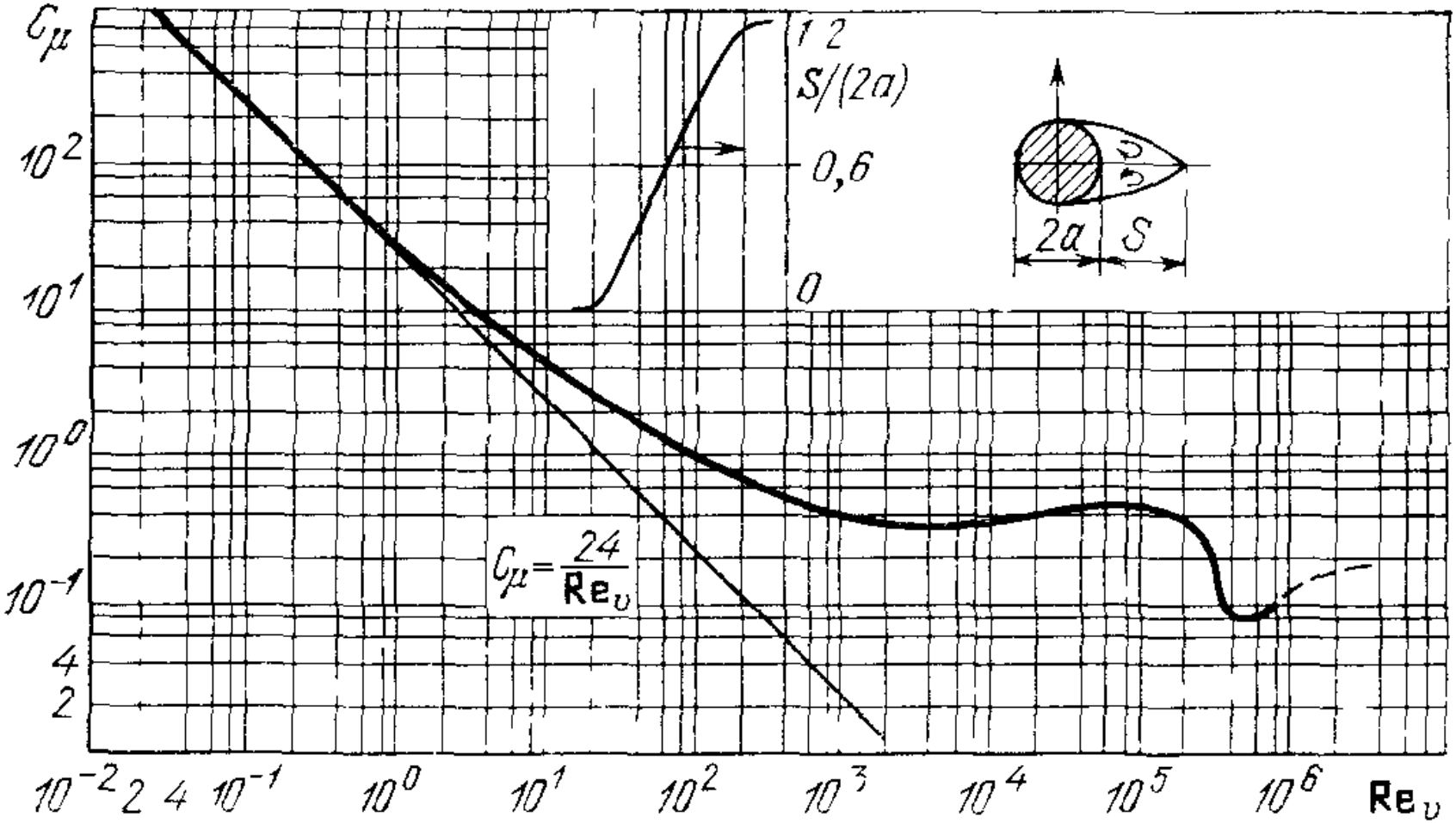
(2) $2 < \mathrm{Re}_p < 500$, переходное (Закон Аллена)

$$C_D = \frac{18.5}{\mathrm{Re}_p^{0.6}}$$

(3) $500 < \mathrm{Re}_p < 2\times10^5$, турбулентное (закон Ньютона)

$$C_D \approx 0.44$$

Коэффициент сопротивления в зависимости от Re



В случае трехмерного поля скоростей газа и движения частицы выражение для силы:

$$\vec{F}_d = C_D A_p \frac{\rho_g \left| \vec{V}_g - \vec{V}_p \right| \left(\vec{V}_p - \vec{V}_g \right)}{2}$$