Введение в гидромеханику.

•**Основные уравнения механики сплошной среды (уравнения неразрывности и сохранения импульса).**

- **Подъем магмы в каналах и дайках. Течение Пуазейля.**
- **Простейшая модель извергающегося вулкана.**
- **Ламинарные и турбулентные течения**

МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ

ТЕЛ 939-5476, EMAIL: MELNIK@IMEC.MSU.RU

Страница курса в Интернете:
http://wiki.web.ru/wiki/Геологический_факультет_МГУ:Вулканология


НАБЛЮДЕНИЯ
расход магмы
сейсмические сигналы
деформации поверхности
температура
высота колонны
ЛАБОРАТОРНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ
плотность
вязкость
термодинамические свойства
Структура
ПЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ
Условия подъема магмы
начальный состав
кинетические процессы
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОГНОЗ

Что происходит в канале вулкана?

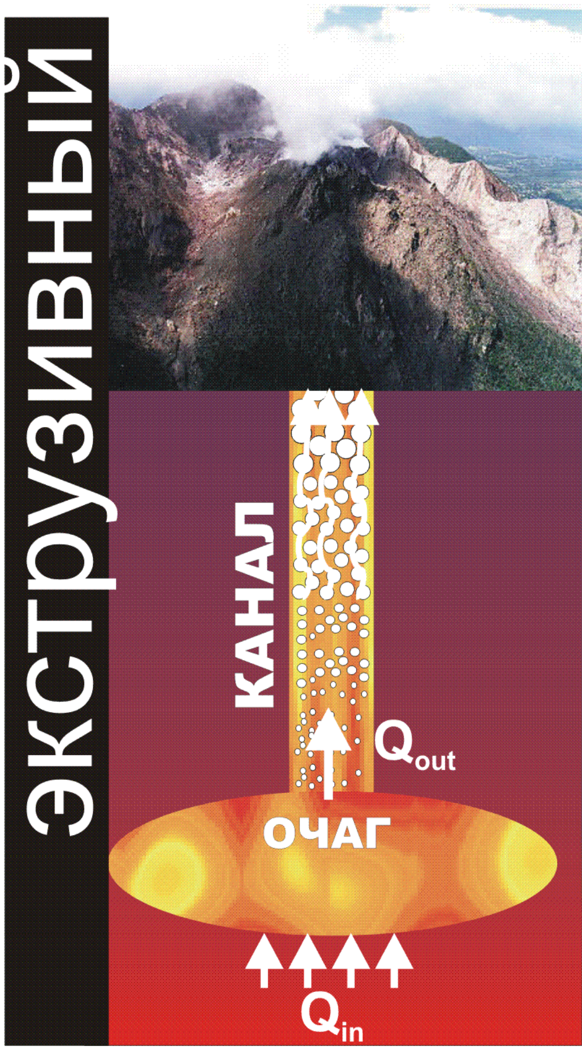
Расход
10^{6}-10^{12} кг/с

Расход
10^{2}-10^{4} кг/с

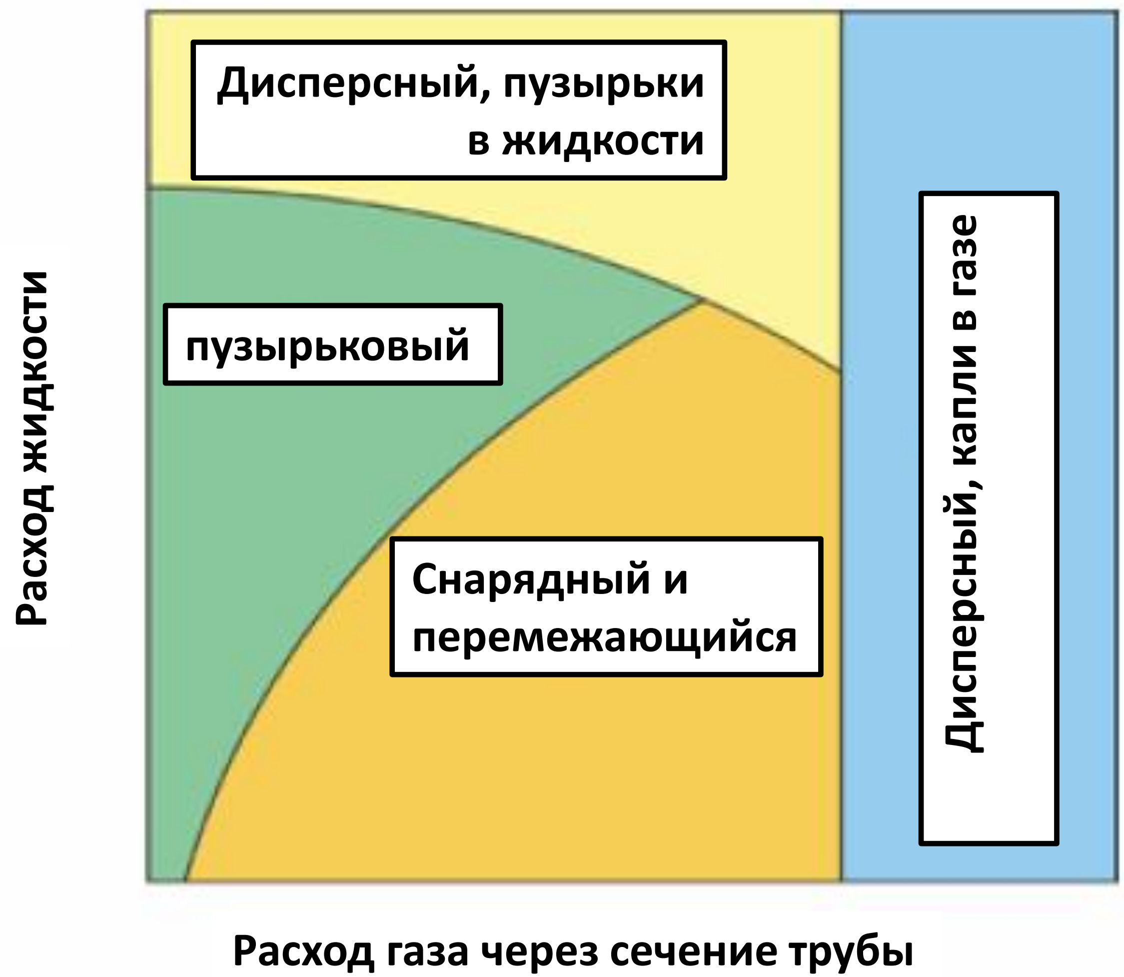
При подъеме магмы из очага в результате падения давления происходит образование и рост пузырьков.

При эксплозивном режиме происходит фрагментация магмы с образованием газовзвеси.

При экструзивном (эффузивном) режиме пузырьки образуют проницаемую пену. Существенен отток газа и кристаллизация магмы.



Режимы течения многофазных сред



Связь типов извержения и режимов течения в трубе

Исландский, экструзивный		**Пузырьковый**
Гавайский		**Дисперсионный / пузырьковый**
Стромболианский		**Снарядный**
Вулканиаский (суб, ултра)- Плинианский		**Дисперсионный**

Основные обозначения

- *V* – скорость [м/с]
- Q – расход [м^3/с, кг/с]
- *S* – площадь [м^2]
- *D* – диаметр [м]
- *P* – давление [Па]
- ρ - плотность [кг/м^3]
- μ - вязкость [Па * с]
- *T* – температура [К]
- *x,y,z* –координаты [м]
- *dx* – малое изменение координаты *x*

- Производная
- Функции 1 переменной:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$$

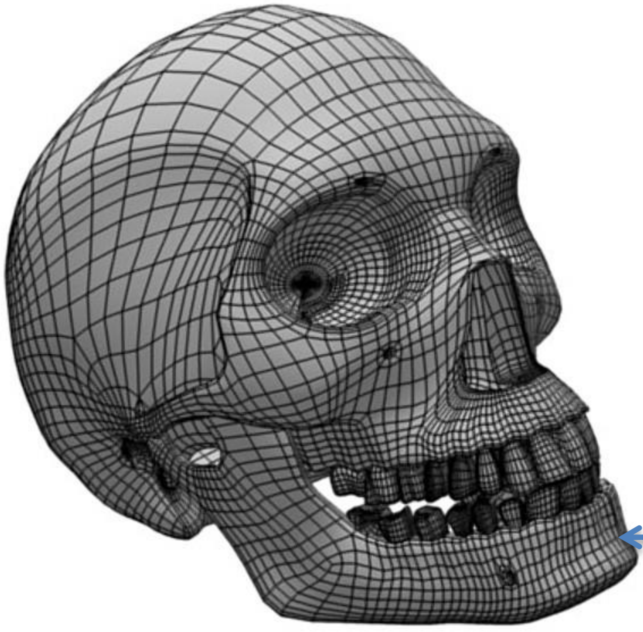
- Функции многих перем.:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \lim_{dx \to 0} \frac{F(x+dx,y) - F(x,y)}{dx}$$

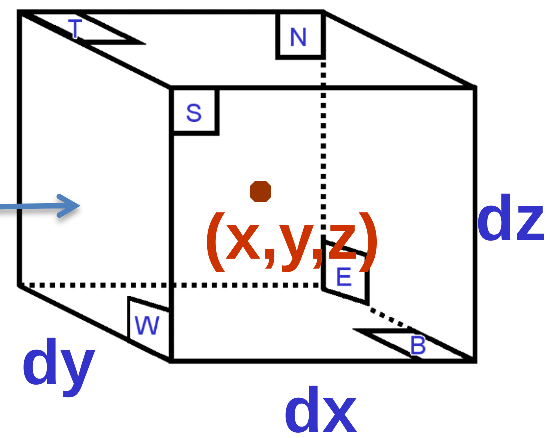
Уравнения механики сплошной среды

Законы сохранения массы и импульса

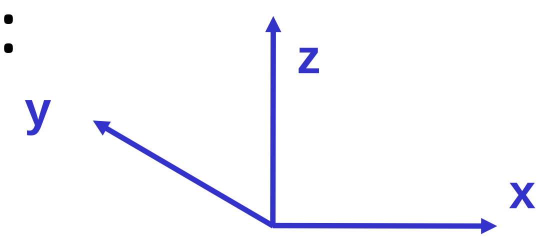
Что такое сплошная среда



N>>1, *l*<<*L*



- Мы можем описать среду в данном элементе с помощью:
  - Скорости $\vec{V} = \left(V_x, V_y, V_z\right)$
  - Давления P
  - Плотности ρ
  - Температуры T
  - …



Закон сохранения массы

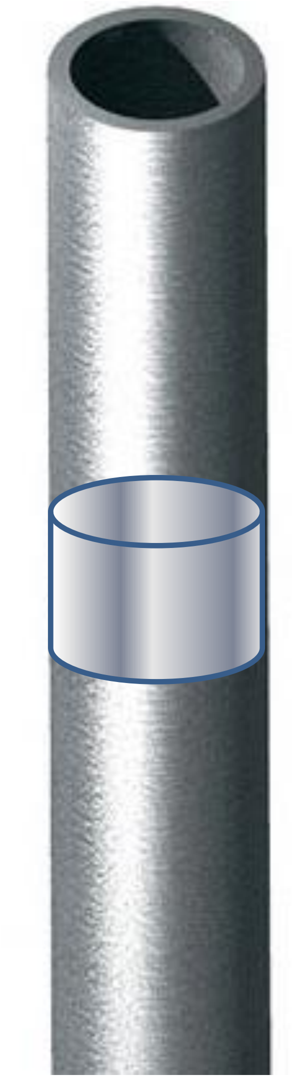
М.В. Ломоносов
1711–1765

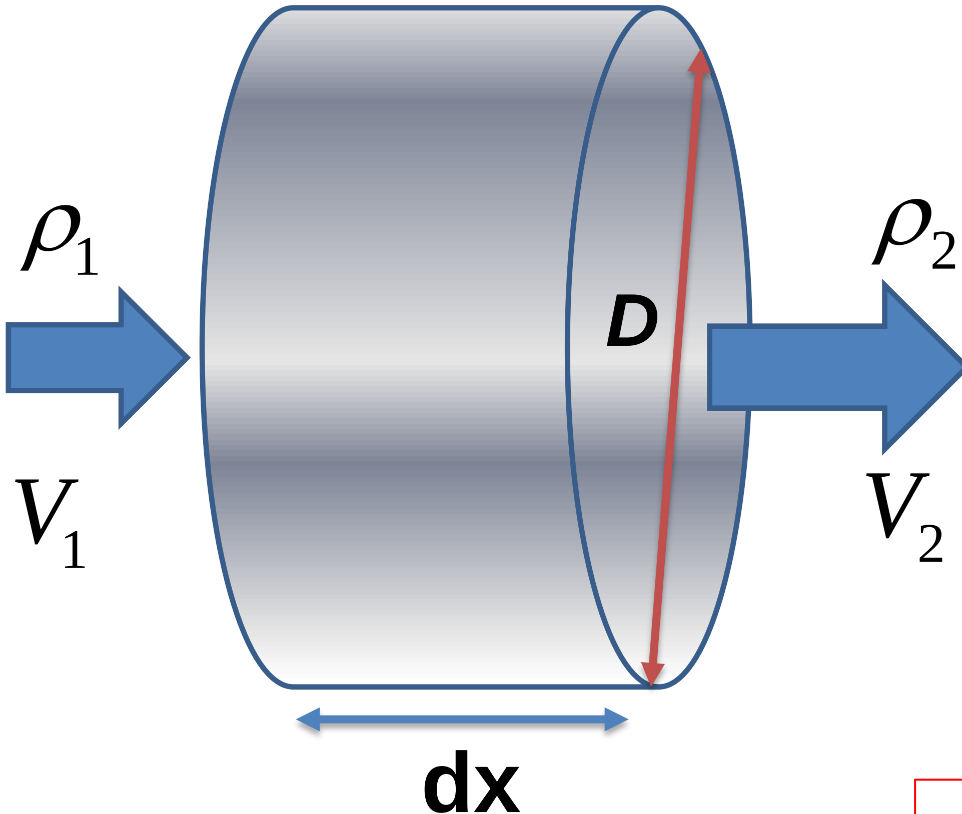
Все встречающиеся в природе изменения происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого. Так, сколько материи прибавляется к какому-либо телу, столько же теряется у другого…

…во всякой операции [химической реакции] имеется одинаковое количество материи до и после, что качество и количество начал остались теми же самыми, произошли лишь перемещения, перегруппировки.

А. Лавуазье
1743–1794

Течение в трубе, расход

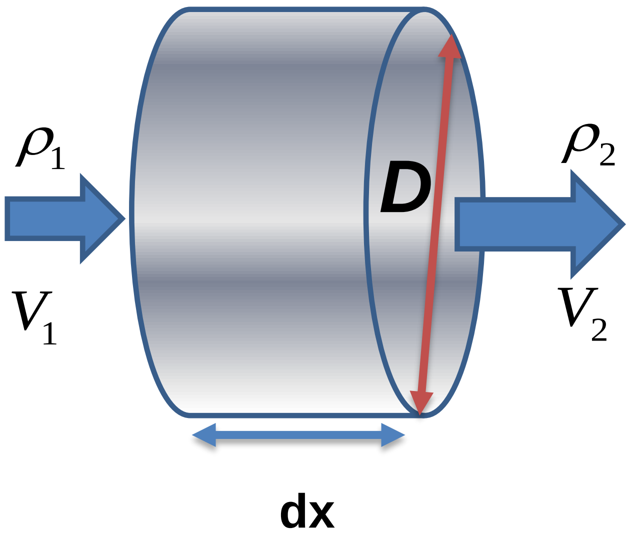




Расход = плотность х скорость х площадь

$$\boxed{Q = \pi \frac{D^2}{4} \rho V}$$

Закон сохранения массы в трубе



$$M = \pi \frac{D^2}{4} dx\rho = Sdx\rho$$

Полная масса в отрезке трубы

$$\frac{\partial}{\partial t} M = Sdx \frac{\partial}{\partial t} \rho$$

Изменение массы во времени

$$\frac{\partial}{\partial t} M = -Q_2 + Q_1 = -S\left(\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1\right)$$

Закон сохранения массы

Изменения массы на отрезке трубы = разности расходов втекающей и вытекающей жидкости.

Закон сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t}M = Sdx\frac{\partial \rho}{\partial t} = -S\left(\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1}{dx}$$

$$\Downarrow$$

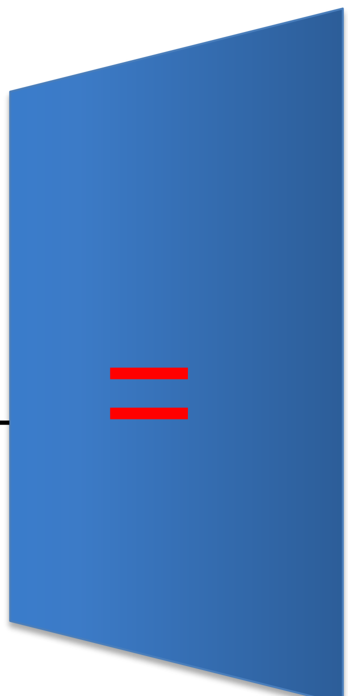
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} = 0$$

Уравнение неразрывности

Канал переменного сечения

$$\boxed{S\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho VS)}{\partial x}=0;\ S=\pi\frac{D^2}{4}}$$

$\rho_1 S_1 V_1$



$\rho_2 S_2 V_2$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}=0}$$

Стационарное течение или
постоянная плотность

<u>Расход</u>

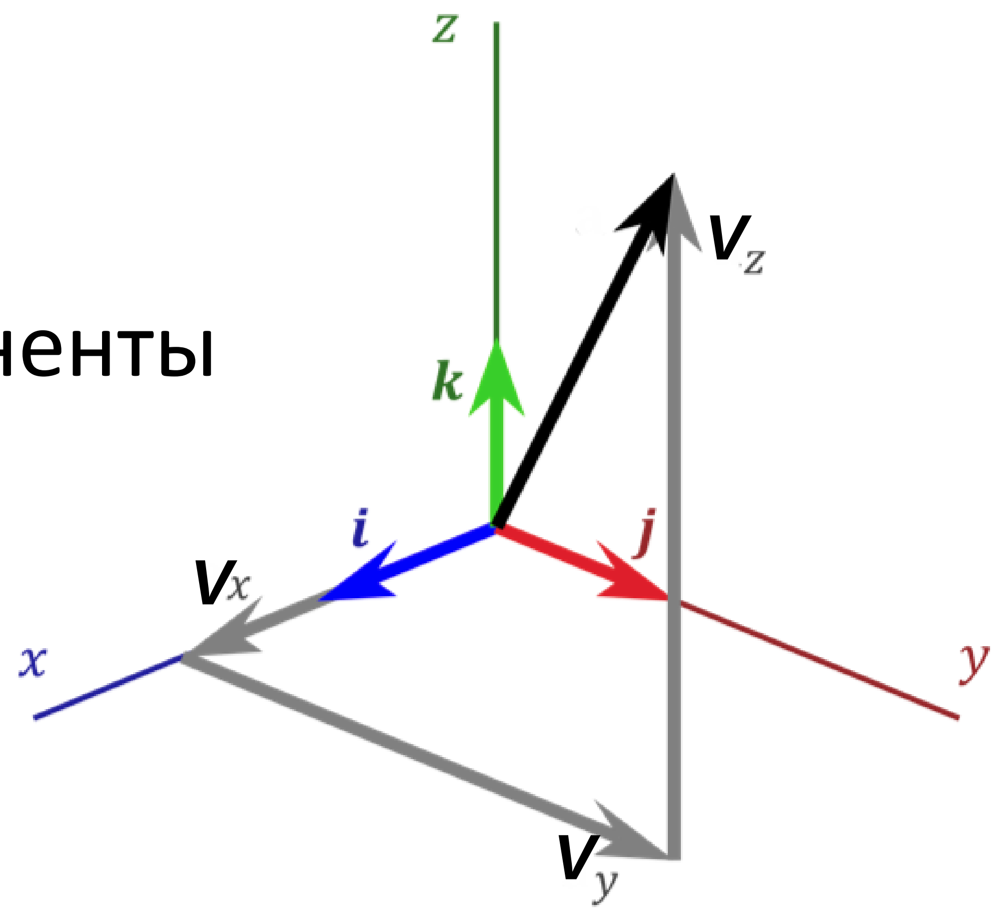
Массовый: ρSV кг/с

Объемный: SV м^3/с

Мир трехмерен!

Скорость – 3 компоненты

$$\vec{V} = \left(V_x, V_y, V_z\right)$$



<u>Закон сохранения массы:</u>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

2-й закон Ньютона

Sir Isaac Newton
1642-1727

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dJ}{dt} = F$$

Ускорение тела пропорционально равнодействующей сил, действующих на него.

Импульс

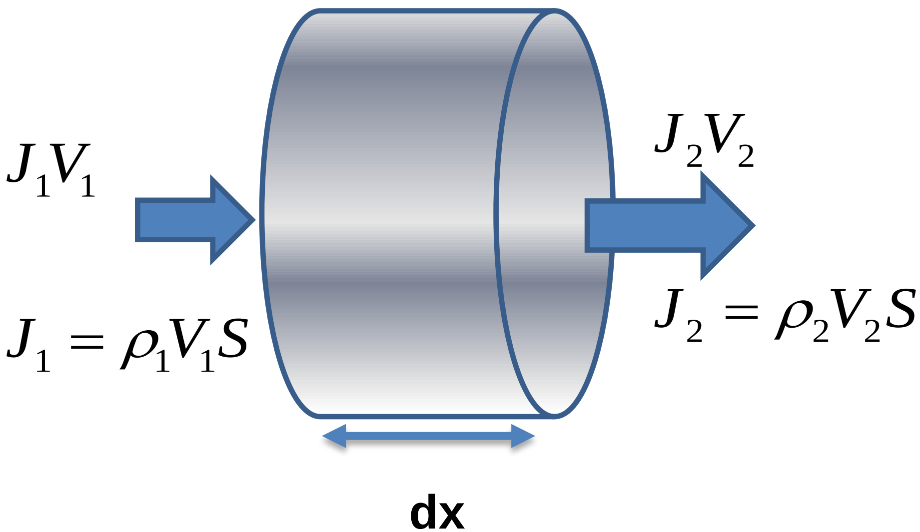
Произведение массы тела на его скорость:

$$\vec{\mathbf{J}} = m\vec{\mathbf{V}}$$

Для жидкости в отрезке трубы:

$$J = Sdx\rho V$$

Изменение импульса в отрезке трубы



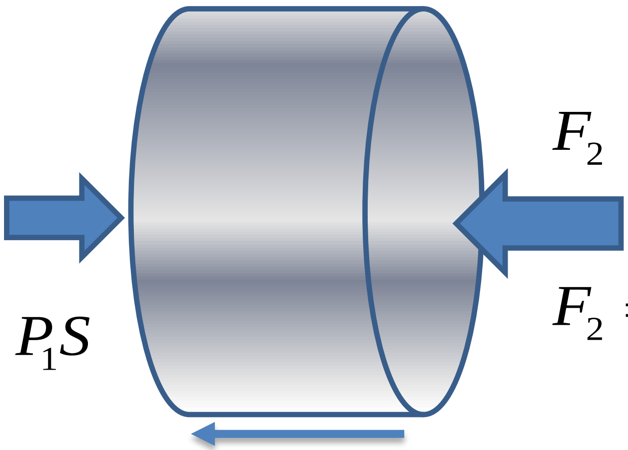
$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{J} = Sdx\frac{\partial \rho V}{\partial t}$$

Изменение импульса= Притоки импульса + Действие сил

$$Sdx\frac{\partial \rho V}{\partial t} = -J_2 V_2 + J_1 V_1 + dF$$

Силы

F_1



F_2

$F_1 = P_1 S$

$F_2 = P_2 S$

Сила с торцов = Давление * площадь

$\pi D dx \tau$ Сила от стенки = площадь стенки*элементарную силу

Сила, действующая на жидкость

$$dF = -S\left(P_2 - P_1\right) - \pi D dx \tau - \rho g S dx$$

Сила тяжести

Закон сохранения импульса

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t}+\frac{\partial \rho V \cdot V}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{4\tau}{D}-\rho g$$

С учетом закона сохранения массы

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t}+\rho V\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{4\tau}{D}-\rho g$$

Вернемся в трехмерный мир

x-компонента:

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=\frac{\partial\left(-P+\tau_{xx}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\rho g_x$$

y-компонента:

$$\rho\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\left(-P+\tau_{yy}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho g_y$$

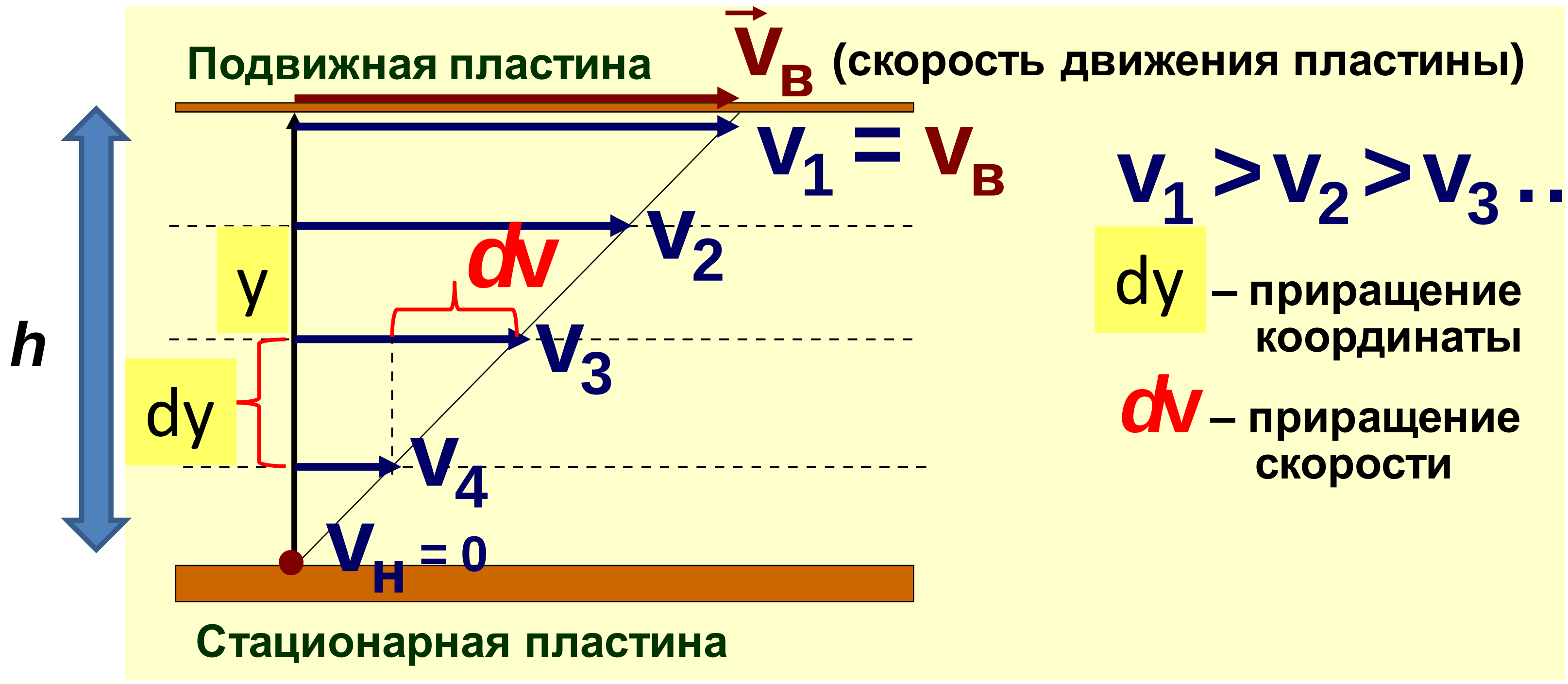
z-компонента:

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\left(-P+\tau_{zz}\right)}{\partial z}+\rho g_z$$

Реологические соотношения

- Предыдущие уравнения не замкнуты. Они содержат плотность, скорость (3 компоненты) и напряжения (9 компонент)
- Надо выразить напряжения через скорости или что-нибудь еще.

Вязкая жидкость. Опыт Ньютона



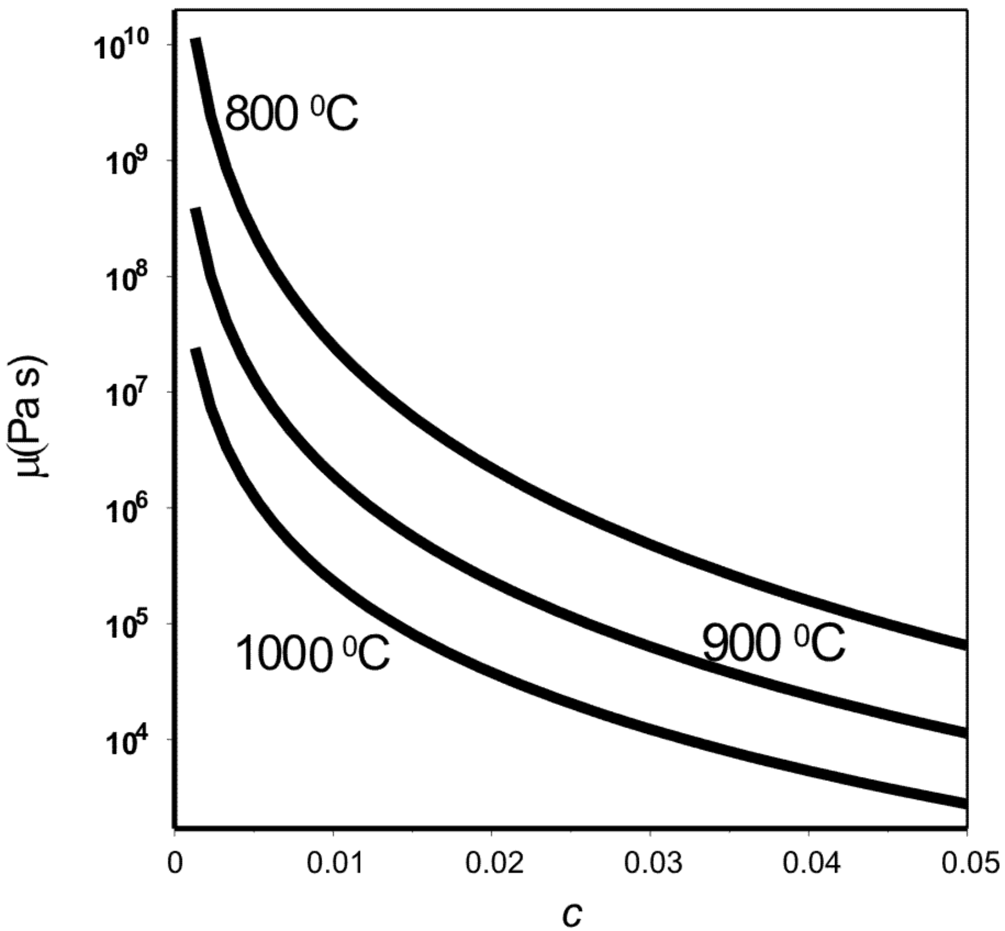
$$\tau = \frac{F}{A} \sim \frac{V_x}{h} = \frac{dV_x}{dy}$$

$$\tau = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

Касательное напряжение на стенке пропорционально скорости сдвига

μ – вязкость, коэффициент пропорциональности

Вязкость магмы (расплава)



5%

Hess K-U, Dingwell DB (1996) Viscosities of hydrous leucogranitic melts: a non-Arrhenian model. Am Mineral 81:1297–1300

Сильная зависимость вязкости расплава от температуры и концентрации растворенной воды.

Пар = 10^{-5}
Вода = 10^{-3}
Мёд = 10 Pa c
Битум 10^2

Что влияет сильнее?

$$\log_{10}\mu = \left[-3.545 + 0.833\ \ln(w)\right] + \frac{9601 - 2368\ \ln(w)}{T - \left[195.7 + 32.25\ \ln(w)\right]}$$

$w = c * 100,\ \textit{в весовых}\ \%,\ T - \textit{в}\ K.$

- Что приведет к большему увеличению вязкости:
- Уменьшение концентрации воды
  с 2 до 1%

или

- Охлаждение магмы с 1000 до 900 С?

?

Связь между напряжениями и изменением скорости = деформацией

При одномерном сдвиговом движении:

$$\tau = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

В общем случае:

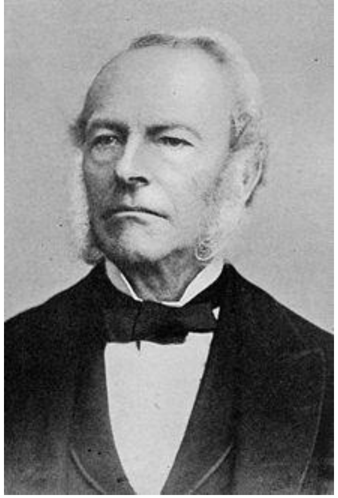
(сдвиговое напряжение) = (вязкость)х(скорость деформации)

- В декартовых координатах, в трехмерном случае:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)$$



Sir George Gabriel Stokes

Уравнения Навье -Стокса (1822)

$1,000,000 за доказательство существования и единственности решения

Claude Louis Marie Henri Navier

x-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

y-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

z-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА МОЖНО РЕШИТЬ!

ИНОГДА☹

Гидростатика: давление

Blaise Pascal

Паскаль вставил в закрытую бочку, наполненную водой, трубку площадью 1 см^2, длиной 5 м и, поднявшись на балкон второго этажа дома, вылил в эту трубку кружку воды. Когда вода в ней поднялась до высоты ~ 4 метра, давление воды увеличилось настолько, что в крепкой дубовой бочке образовались щели, через которые потекла вода.

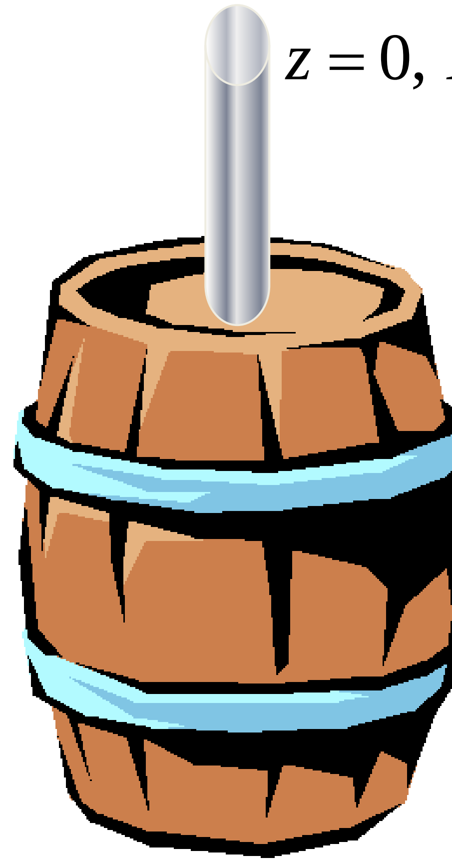
Решим уравнения Навье-Стокса

Гидростатика:

$$\vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

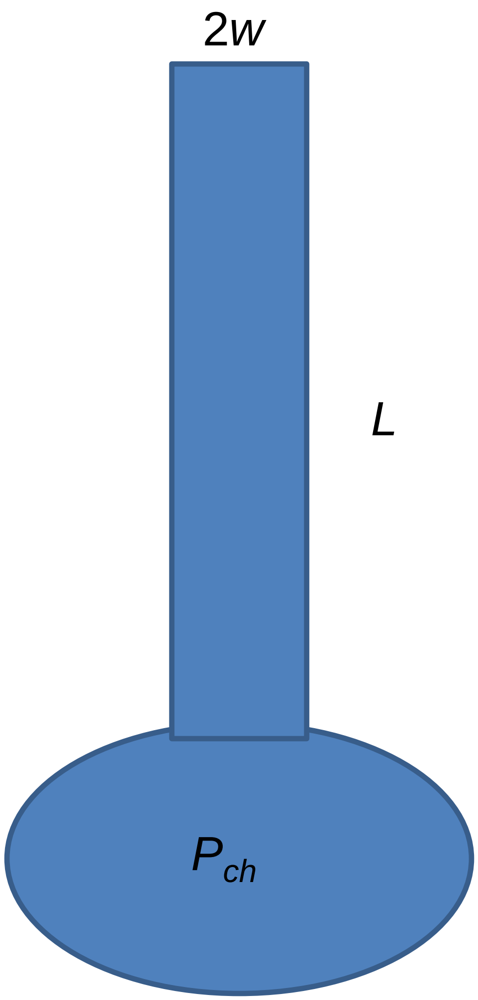
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \;\Rightarrow\; P = P_a + \rho g z$$



$z = 0,\ P = P_a$

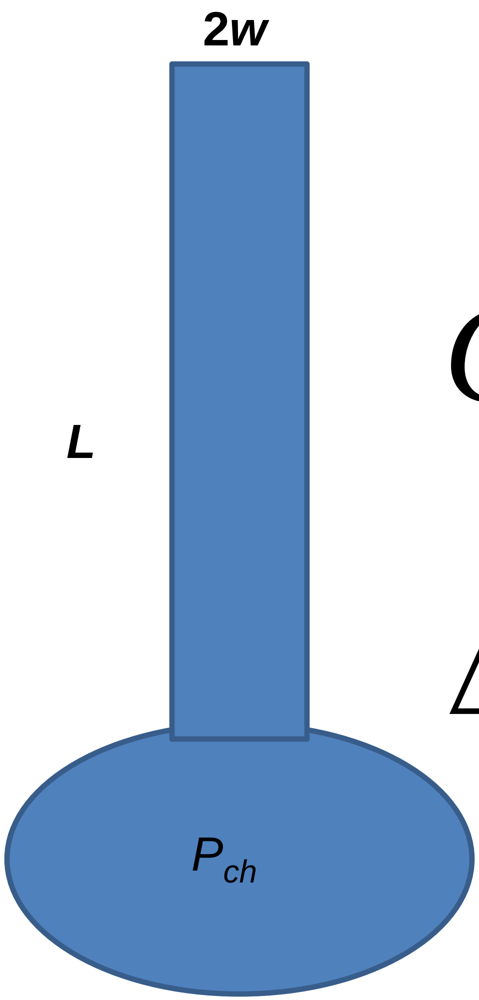
Сила=
Давление x Площадь

Наша 1-я модель вулканического извержения.



- Чтобы понять опасен ли вулкан надо посчитать возможный расход магмы!
- Пусть в очаге скопилась магма с давлением P_{ch}
- Канал вулкана – щель толщины $2w$, ширины h и длины L.
- Вязкость магмы постоянна.
- Плотность магмы тоже постоянна

Связь расхода с перепадом давления



$$Q = \frac{2w^3 h}{3\mu}\frac{\Delta P}{L}, \quad \left[м^3 / c \right]$$

$$\Delta P = P_{ch} - P_a - \rho g L$$

Пример

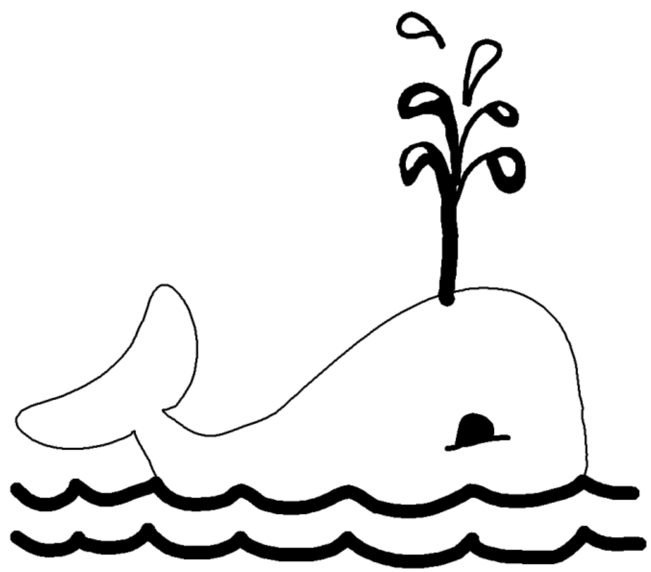
Щелевой канал *w* = 5 м, *h* =200 м, *L*=5000 м, ΔP =10 МПа, μ=10^5 Па с, Q-?

$$Q = \frac{2w^3 h}{3\mu}\frac{\Delta P}{L} = 333 m^3 / s$$

= 2.22 китов/сек

Объем кита:

$$V_w = \frac{M_w}{\rho_w} \approx \frac{150\times 10^3 kg}{10^3 \; kg/m^3} = 150 \;\; m^3$$

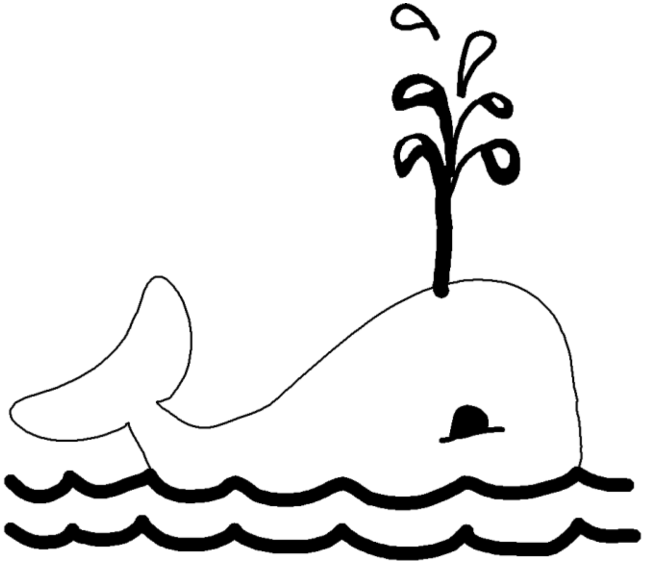


Пример

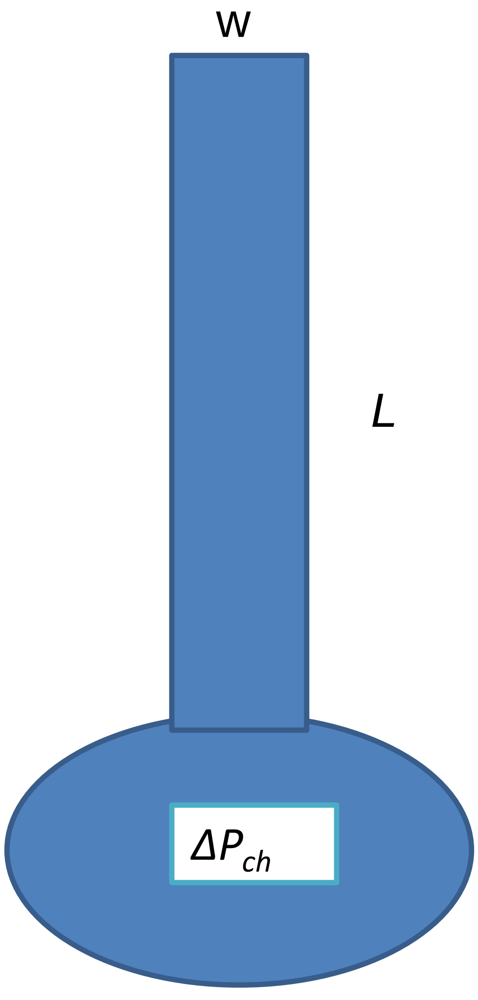
- Цилиндрический канал D = 35.6 м, L=5000 м, ΔP =10 МПа, μ=10^5 Па с, Q-?

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu}\frac{\Delta P}{L} = 788\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

= 5,25 китов/сек



Наша 2-я модель вулканического извержения.



- Пусть в очаге скопилась магма с избыточным давлением $P_1=P_0+\Delta P$
- Канал вулкана – щель с размерами w x h и длины L.
- Вязкость магмы постоянна.
- Плотность магмы тоже постоянна
- Очаг находится в упругих породах, $\Omega(P)$ – объем очага

$$P_1 - P_0 = \beta\left(\Omega_1 - \Omega_0\right)$$

$$\Delta P = \beta\Delta\Omega$$

Соберем воедино!

$$Q(t) = \frac{2w^3h}{3\mu}\,\frac{\Delta P(t)}{L}$$

$$\Delta \mathrm{P}(t) = \beta\,\Delta\Omega(t)$$

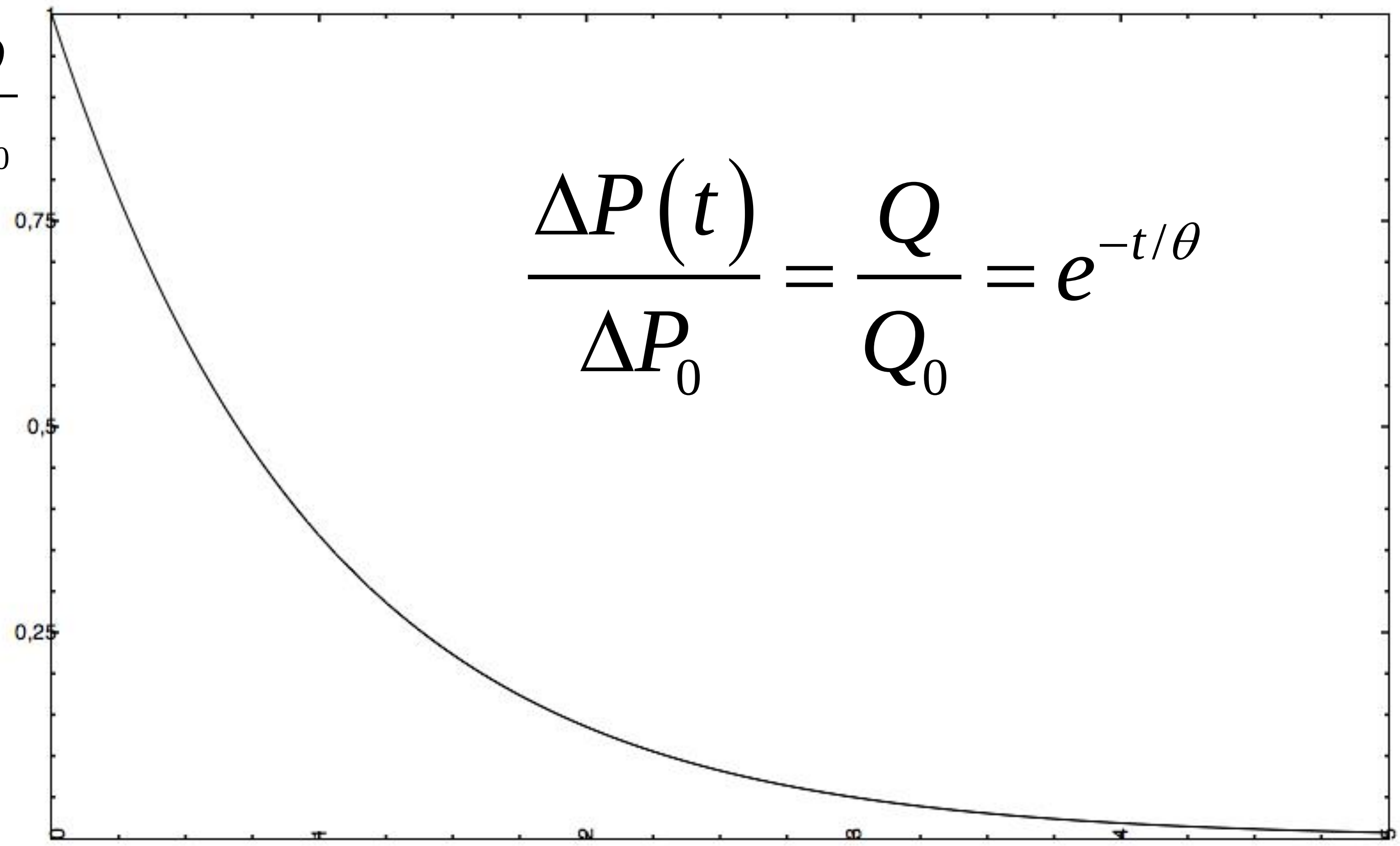
$$\frac{d\Delta \mathrm{P}(t)}{dt} = \beta\frac{d\Delta\Omega(t)}{dt} = -\beta Q(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\Delta \mathrm{P}(t)}{dt}} = -\beta\frac{2w^3h}{3\mu}\,\frac{\Delta P(t)}{L} = \boxed{-\frac{1}{\theta}\Delta P(t)}$$

Решение уравнения

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_0} = \frac{Q}{Q_0}$$

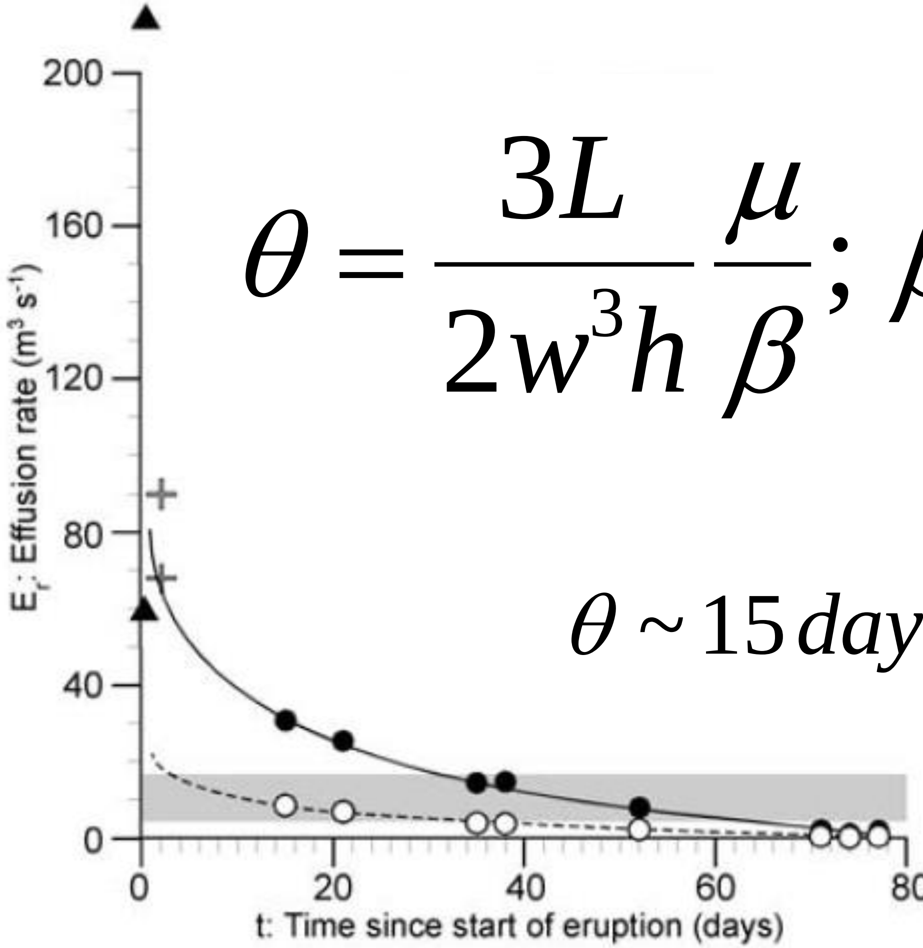


$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta P_0} = \frac{Q}{Q_0} = e^{-t/\theta}$$

$$t/\theta$$

Вулкан Фернандина, Галапагосы

Моделирование вулкана Фернандина, Галапагосы



$$\theta = \frac{3L}{2w^3h}\frac{\mu}{\beta};\ \beta = \frac{E}{\Omega}$$

$$\theta \sim 15\,days$$

Какой же размер очага для вулкана Фернандина?

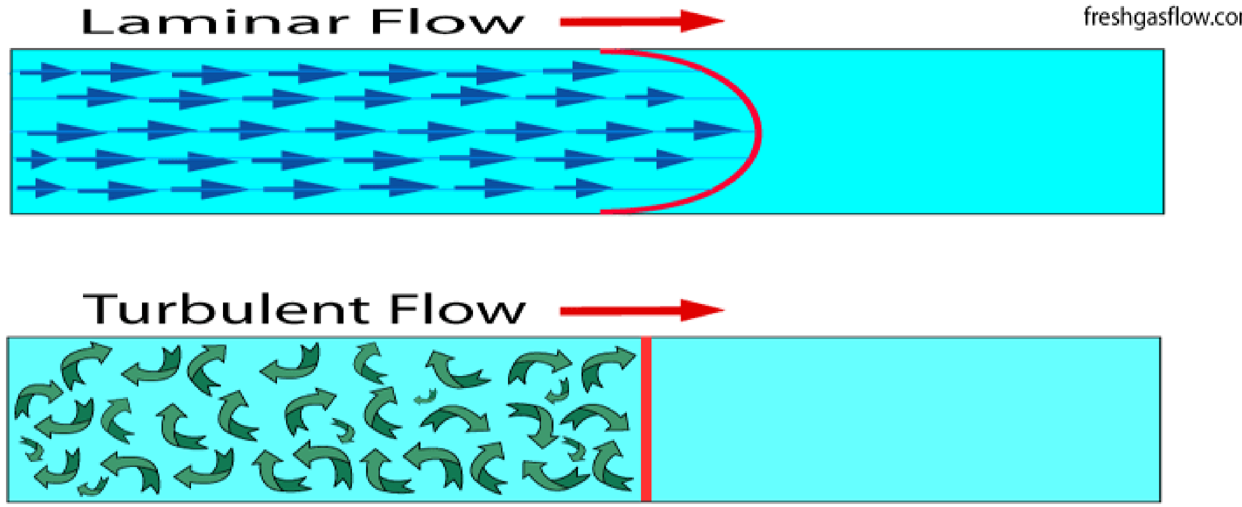
$E = 10^9$ Па, другие параметры как в нашей предыдущей модели.

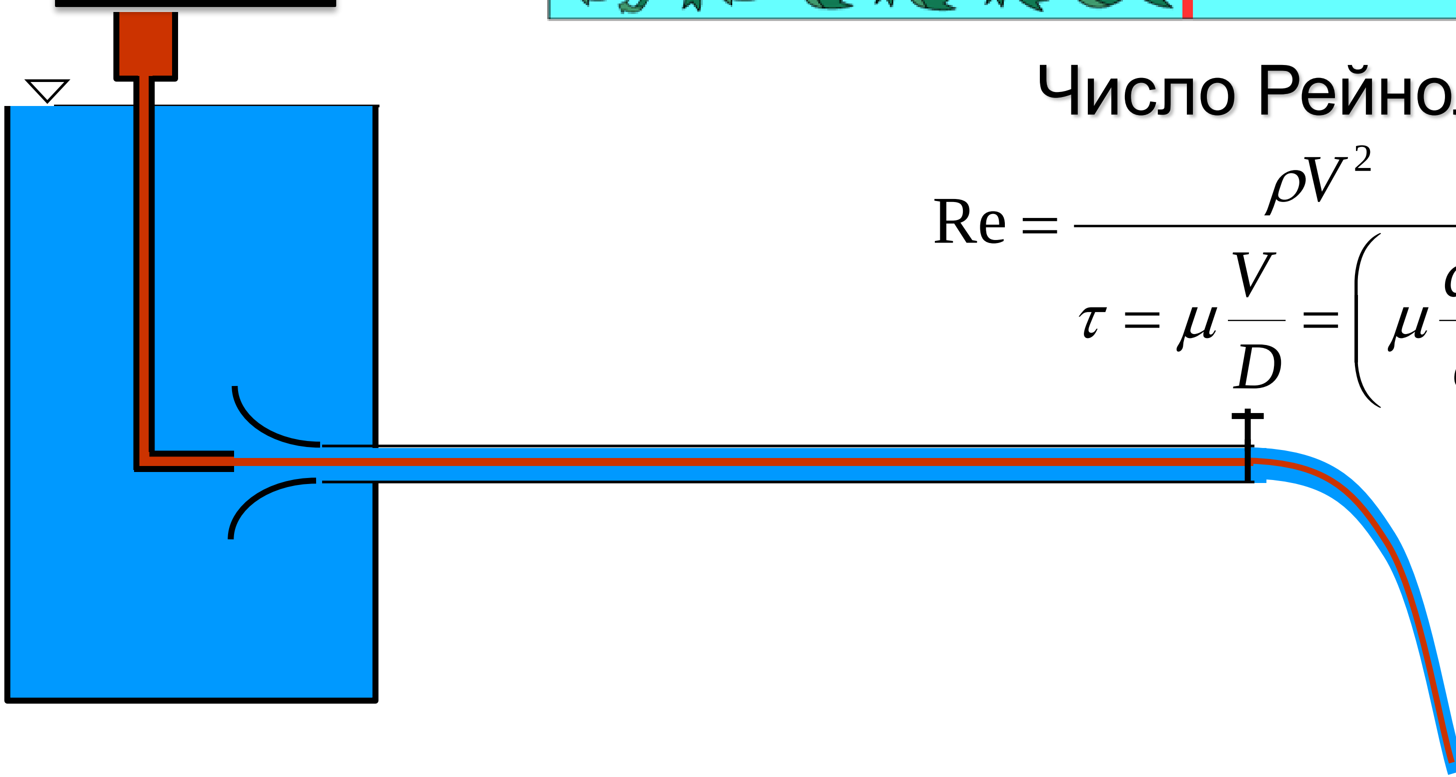
Результат представить в км^3 и в китах

?

Ламинарные и турбулентные течения

Osborne Reynolds
(1842 -1 912)





Число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V^2}{\tau = \mu \dfrac{V}{D} = \left(\mu \dfrac{dV}{dy} \right)} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Движение магмы в канале

Критическое число Рейнольдса ~ 2000

<u>Для пузырьковой жидкости</u>
Канал – 50 м
Вязкость 10^5 Па с
Скорость 1 м/с
Плотность 2500 кг/м^3

ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНО?

<u>Для газовзвеси</u>
Канал – 50 м
Вязкость 10^{-5} Па с
Скорость 100 м/с
Плотность 10 кг/м^3

ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНО?

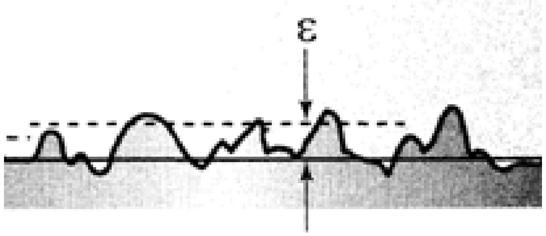
Сила и коэффициент сопротивления канала

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_{av} = \frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\Delta P}{L} \Leftrightarrow \frac{\Delta P}{L} = \frac{32\mu V_{av}}{D^2} = \lambda \frac{\rho V_{av}^2}{2D}$$

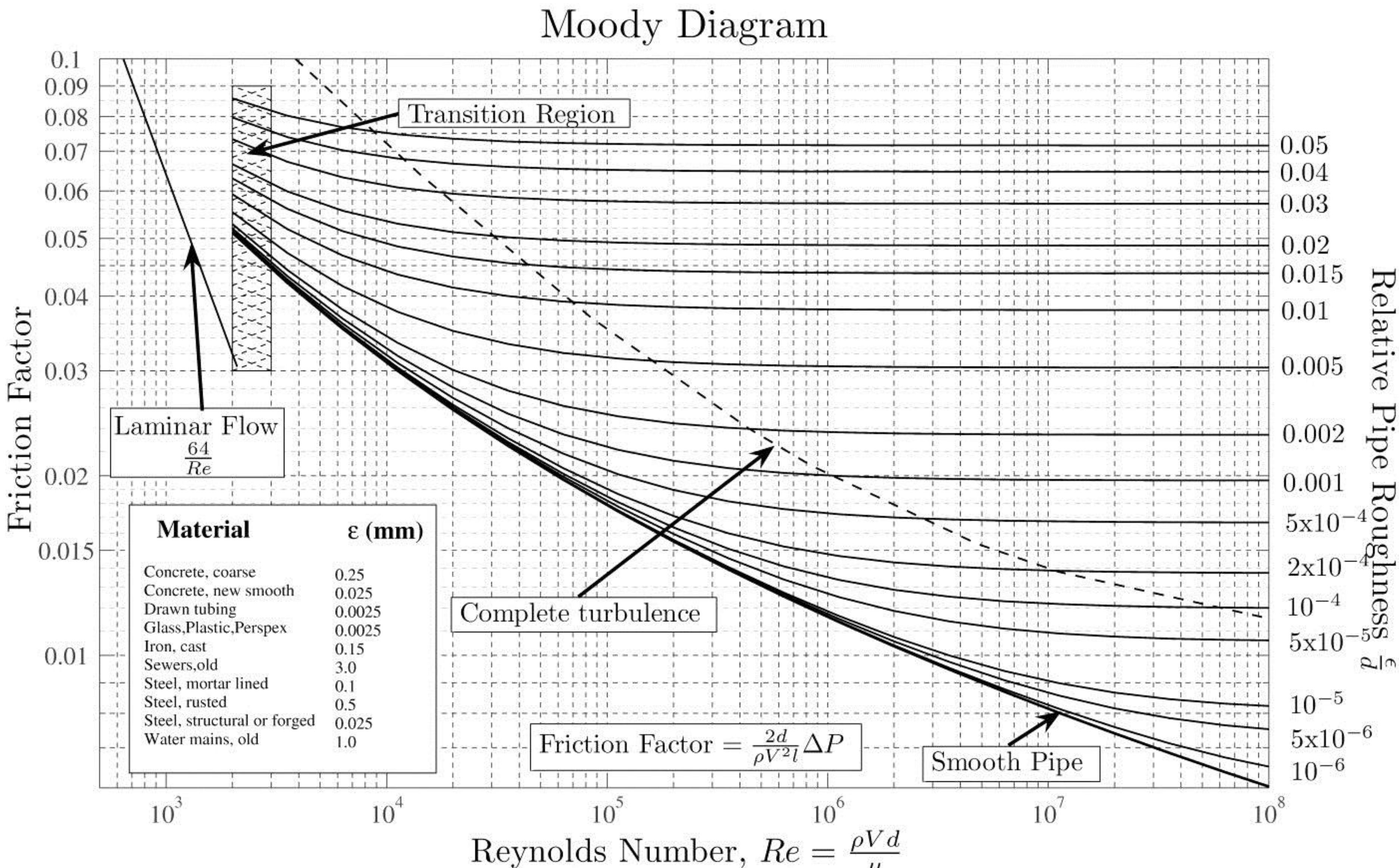
$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V_{av} D}{\mu}; \qquad \lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Для турбулентного режима:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{0.269\varepsilon}{D}\right)$$



Коэффициент сопротивления



<u>ЗАДАЧА</u>

Посчитать перепад давления
для течения газовзвеси в канале
с учетом сил тяжести и сопротивления:

Диаметр D= 50 м
Длина L=3 км
Вязкость μ = 10^{-5} Па с
Скорость V_{av}=100 м/с
Плотность ρ =10 кг/м^3
Шероховатостью стенок ε/D=0.05

?

Итак:

- Вывели страшные уравнения, которые описывают движение жидкости.
- Ввели понятие вязкости.
- Нашли простые и полезные решения страшных уравнений.
- Построили простую модель извержения, которая позволяет оценить параметры вулканической системы по данным наблюдения.
- Узнали о турбулентных и ламинарных течениях

- Узнаем, что не все так просто ☹