

## Введение в гидромеханику и моделирование.

- Основные уравнения механики сплошной среды (уравнения неразрывности и сохранения импульса).
- Реология магмы.
- Подъем магмы в каналах и дайках. Течение Пуазейля. Сила сопротивления канала вулкана.
- Простейшая модель извергающегося вулкана.

**МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ**

ТЕЛ 939-5476, EMAIL: [MELNIK@IMEC.MSU.RU](mailto:MELNIK@IMEC.MSU.RU)

Страница курса в Интернете:

[http://wiki.web.ru/wiki/Геологический\\_факультет\\_МГУ:Вулканология](http://wiki.web.ru/wiki/Геологический_факультет_МГУ:Вулканология)

НАБЛЮДЕНИЯ

расход магмы

сейсмические  
сигналы

деформации  
поверхности

температура

высота колонны

ЛАБОРАТОРНЫЕ  
ИЗМЕРЕНИЯ

плотность

вязкость

термодинамические  
свойства

Структура

ПЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ  
ЭКСПЕРИМЕНТЫ

условия подъема магмы

начальный состав

кинетические процессы

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**ПРОГНОЗ**

# Уравнения механики сплошной среды

Законы сохранения массы и  
импульса

# Лагранжев и Эйлеров

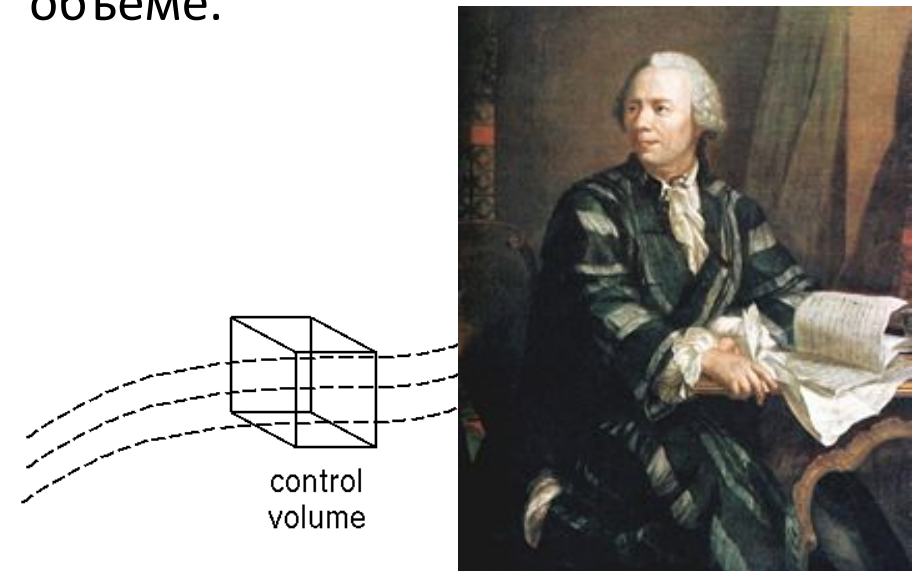
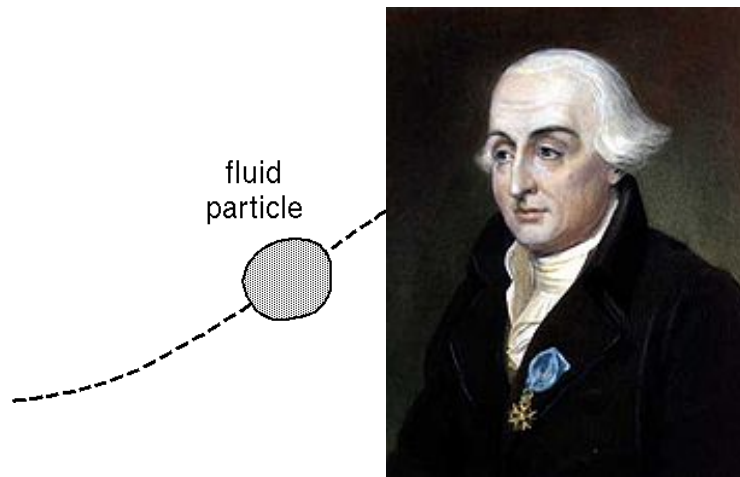
Joseph Louis Lagrange, [1736-1813](#)

Leonhard Euler; [1707 -](#), [1783](#),

## ПОДХОД

- Поток среды может быть представлен в виде потока жидких частиц, для которых определены масса, импульс, энергия и начальное положение. Законы движения записываются для каждой частицы и смотрятся за ее эволюцией во времени.

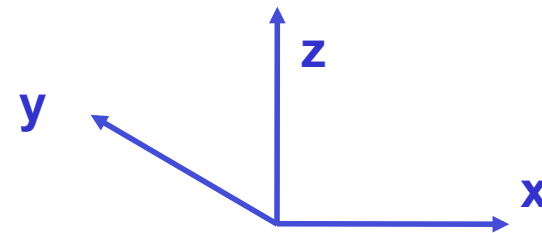
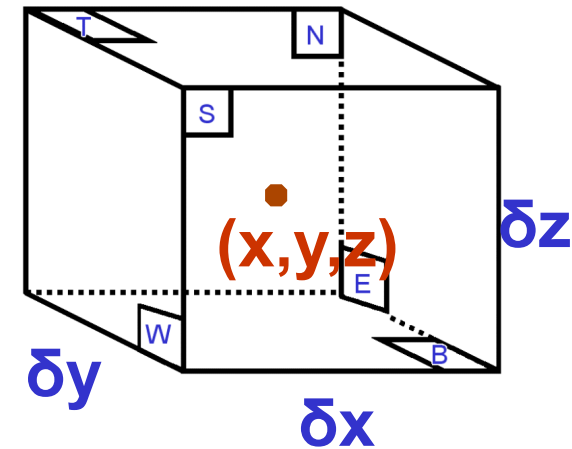
Мы фиксируем элементарный объем сплошной среды с координатами  $(x, y, z)$  и выписываем уравнения для изменения массы, импульса и энергии в этом элементарном объеме.



Данные подходы приводят к одинаковым полям течения, удобство каждого зависит от постановки задачи.

# Свойства элементарного объема

- Мы можем описать жидкость в данном элементе с помощью:
  - Скорости  $u$ .
  - Давления  $p$ .
  - Плотности  $\rho$
  - Температуры  $T$ .
  - физических свойств  $\mu, C_p, \alpha, \beta$



# Ряд Тейлора, или как узнать значение функции в соседней точке

- Пусть имеется бесконечное количество раз дифференцируемая функция  $f(x)$
- И мы знаем ее значение в точке  $x$
- Тогда:

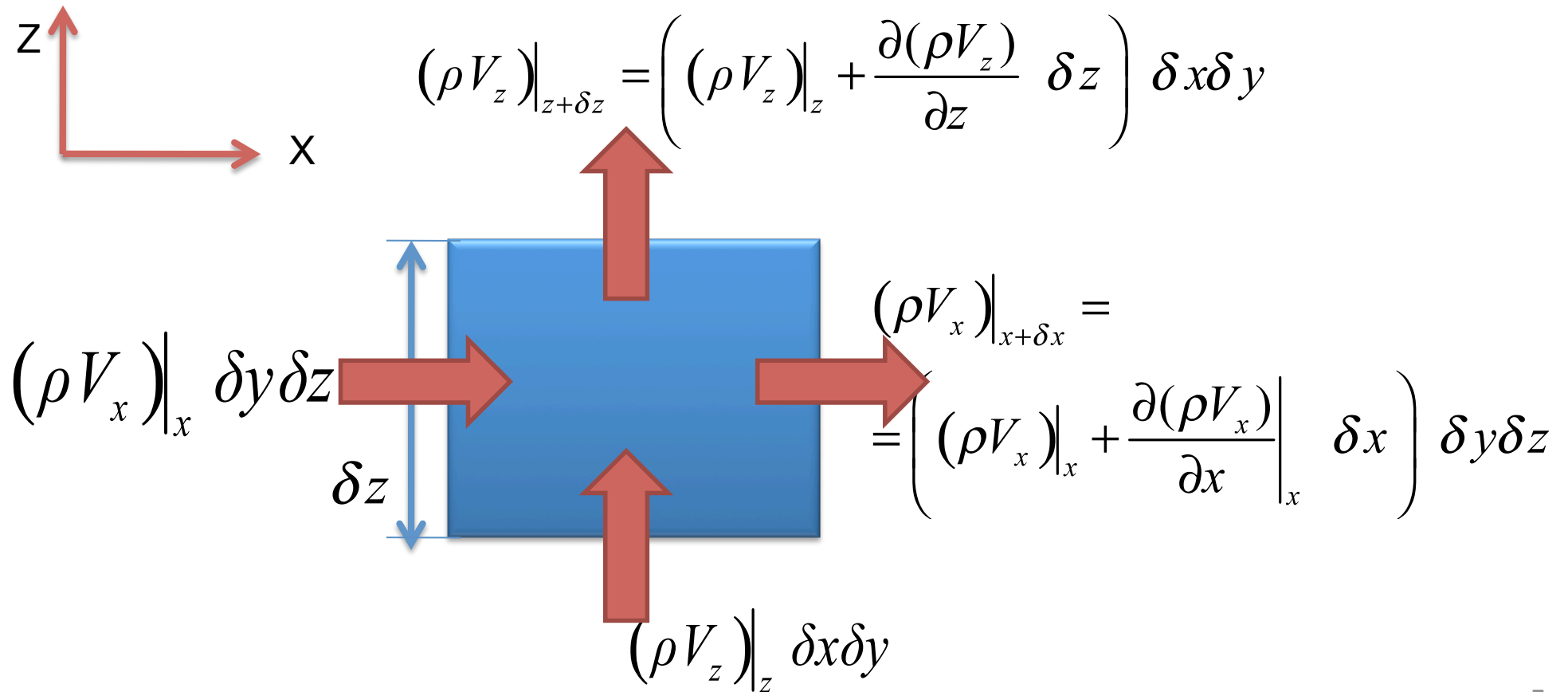
$$f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + \frac{f''(x)}{2}(\delta x)^2 + \dots$$



Brook Taylor, [1685](#)—[1731](#)

# Закон сохранения массы

- **Изменение массы = приток массы извне**
- Изменение массы =  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$
- Притоки массы к граням:



# Запишем закон сохранения массы

$$\delta x \delta y \delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[ \left( (\rho V_x) \Big|_x + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} \Big|_x \delta x \right) \delta y \delta z - (\rho V_x) \Big|_x \delta y \delta z \right] + [y] + [z] = 0$$

После суммирования и деления на объем ячейки

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} + [y] + [z] = 0$$



# Разные формы закона сохранения массы

- В общем виде по координатам:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

- Векторный вид:  $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$

- Для несжимаемой жидкости:  $\rho = \rho_0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$

- Или в компонентном виде:  $\frac{\partial(V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(V_z)}{\partial z} = 0$

- Для стационарного движения  $\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$

## 2-й закон Ньютона

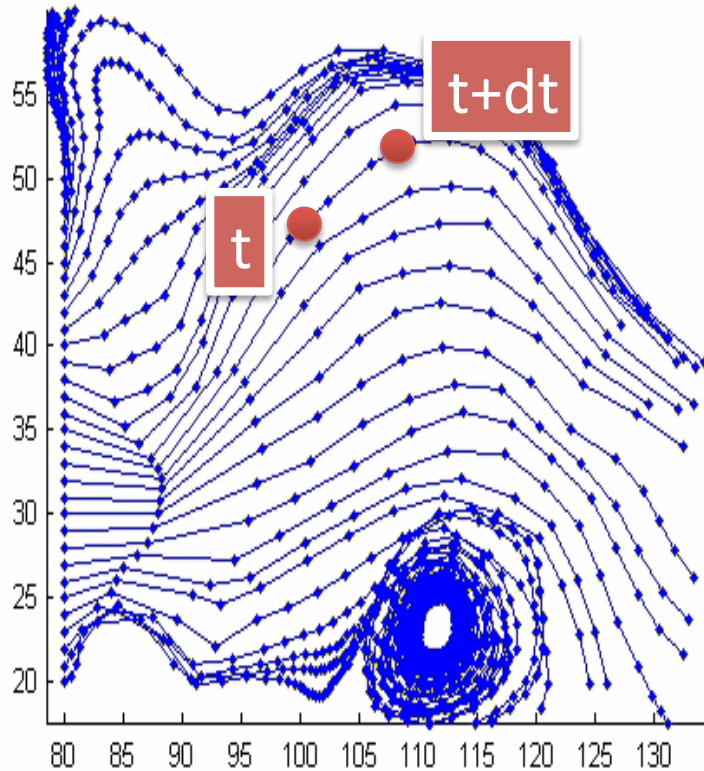


*Sir Isaac Newton,*  
[25 декабря 1642](#)  
[20 марта 1727](#)

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}$$

Ускорение тела  
пропорционально  
равнодействующей сил,  
действующих на него.

# Ускорение жидкой частицы



Пусть в момент  $t$  частица находится в точке  $x, y, z$  и имеет скорость:

$$\vec{V}_{p(t)} = \vec{V}(t, x(t), y(t), z(t))$$

После перемещения частицы она оказалась в точке  $x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt)$ .

Скорость в той точке:

$$\vec{V}_{p(t+dt)} = \vec{V}(t + dt, x(t + dt), y(t + dt), z(t + dt))$$

Ускорение

$$\frac{d\vec{V}_p}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_{p(t+dt)} - \vec{V}_{p(t)}}{dt}$$

# Математическое отступление

## Производная сложной функции

- Пусть имеется функция  $F(x(t))$ .
- Найдем ее производную по  $t$ .

$$\frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF(x(t))}{dx} \frac{dx(t)}{dt}$$

# Ускорение

$$\begin{aligned}\vec{a}_p &= \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \frac{dx_p}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \vec{V} + \frac{dy_p}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \vec{V} + \frac{dz_p}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \vec{V} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + V_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{V} + V_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{V} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{V}\end{aligned}$$

---

$$V_x = \frac{dx_p}{dt}; \quad V_y = \frac{dy_p}{dt}; \quad V_z = \frac{dz_p}{dt}$$

Ускорение частицы (изменение ее скорости) происходит как за счет изменения поля скоростей, так и за счет перемещения в другое место.

# В проекциях на оси координат

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + V_x \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + V_y \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

**3 уравнения!**

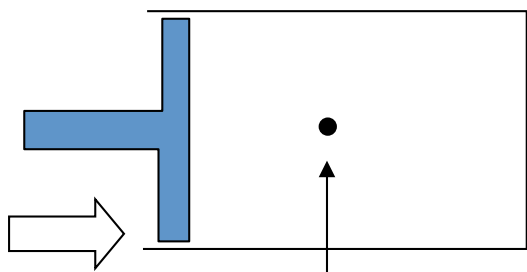
# Физическая интерпретация

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$$

Полное ускорение

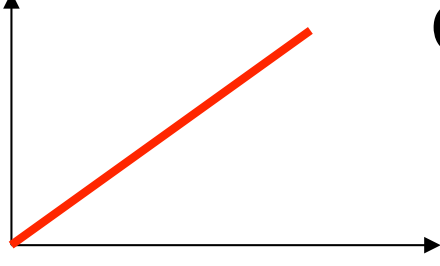
Локальное ускорение

Конвективное ускорение



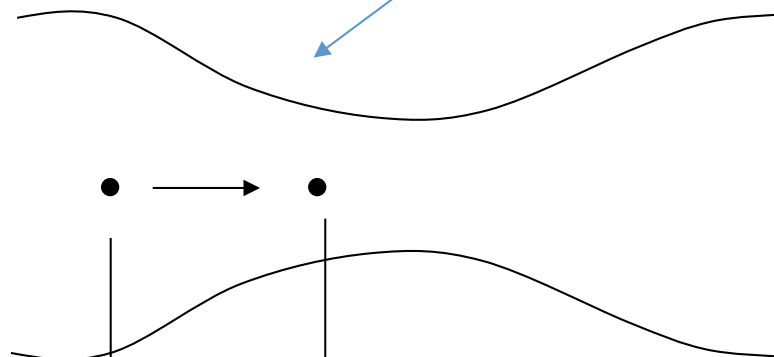
Нестационарный поток

Скорость

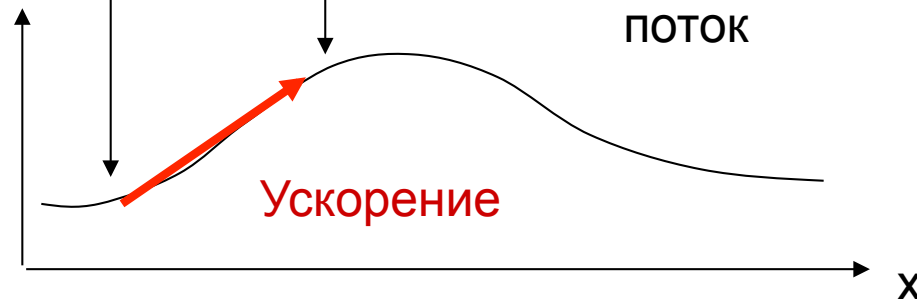


Скорость

время

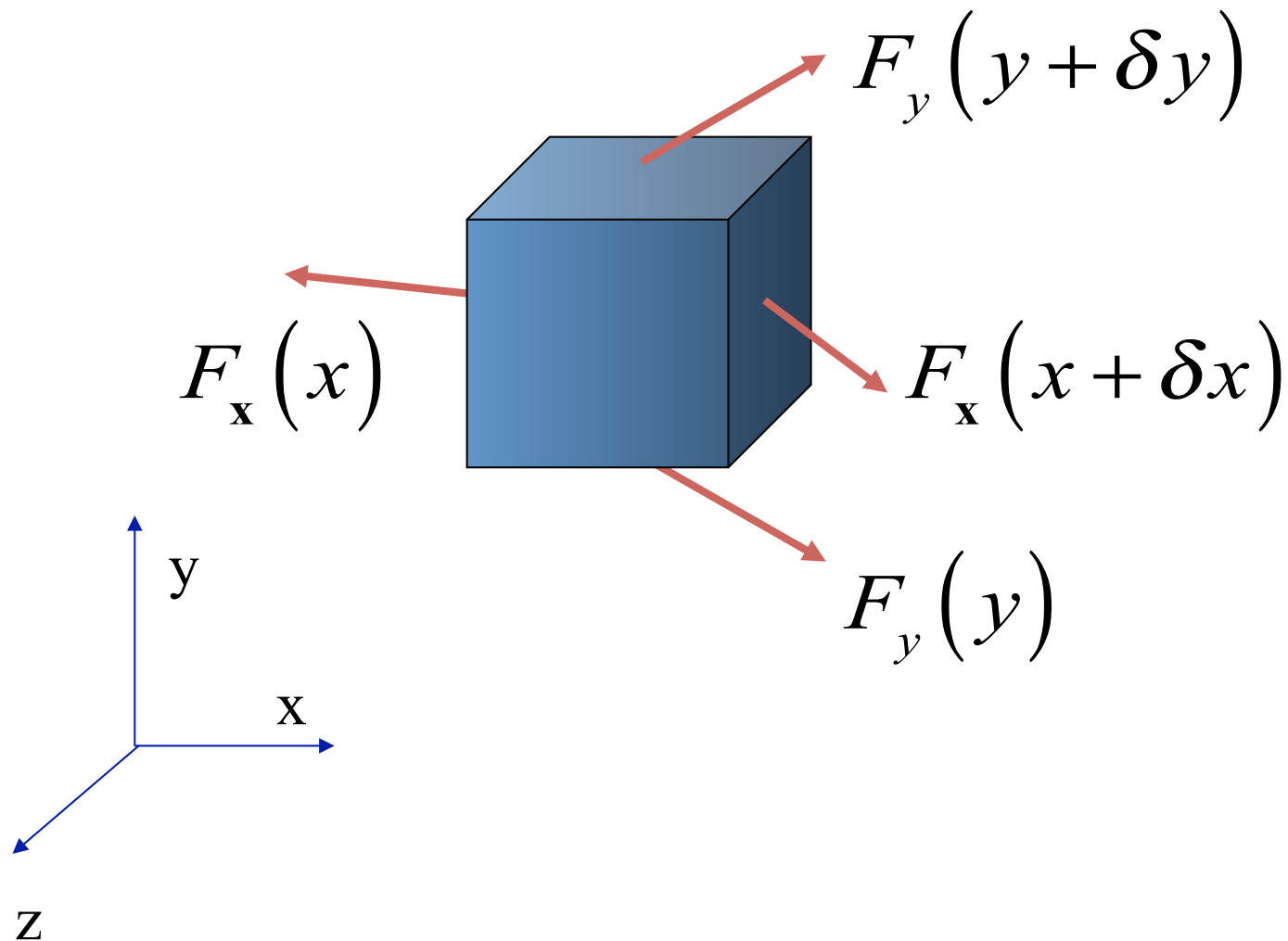


Стационарный поток



Ускорение

# Силы, действующие на элементарный объем со стороны других объемов

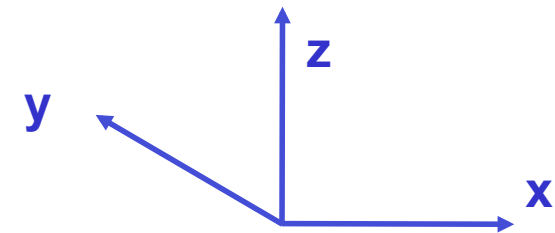
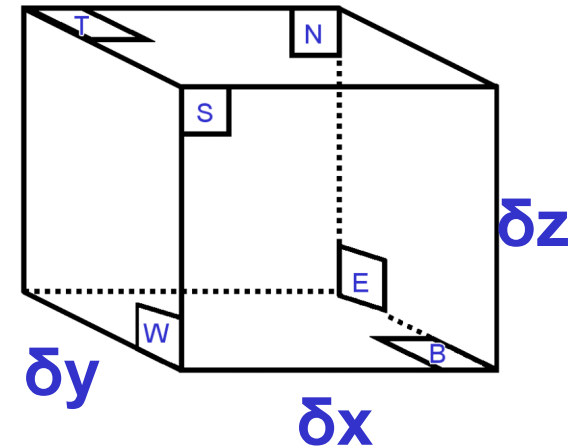




# Силы и напряжения

Величина приложенной силы зависит от размера площадки, к которой она приложена.

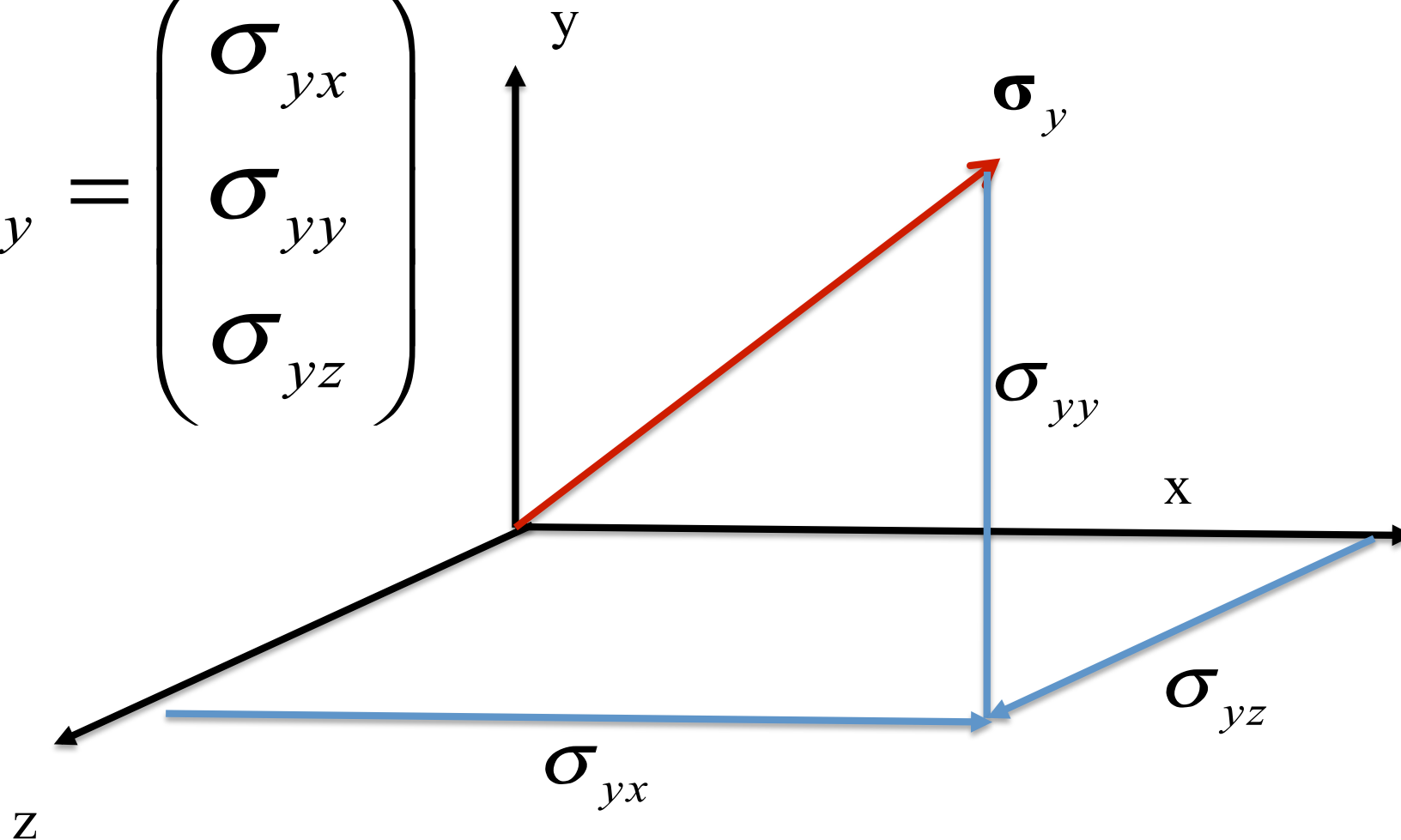
$$\sigma_x = \frac{F_x}{\delta y \delta z}; \quad \sigma_y = \frac{F_y}{\delta x \delta z}; \quad \sigma_z = \frac{F_z}{\delta y \delta x};$$



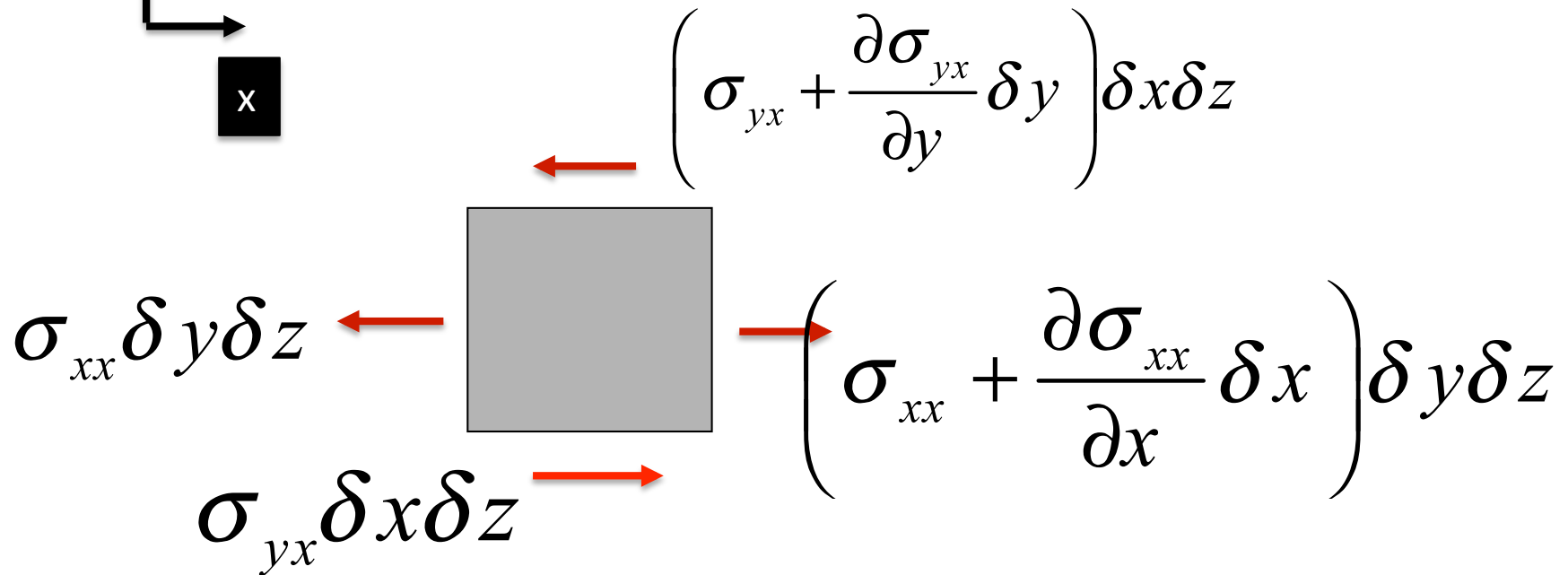
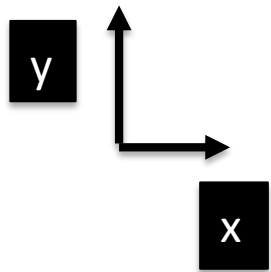
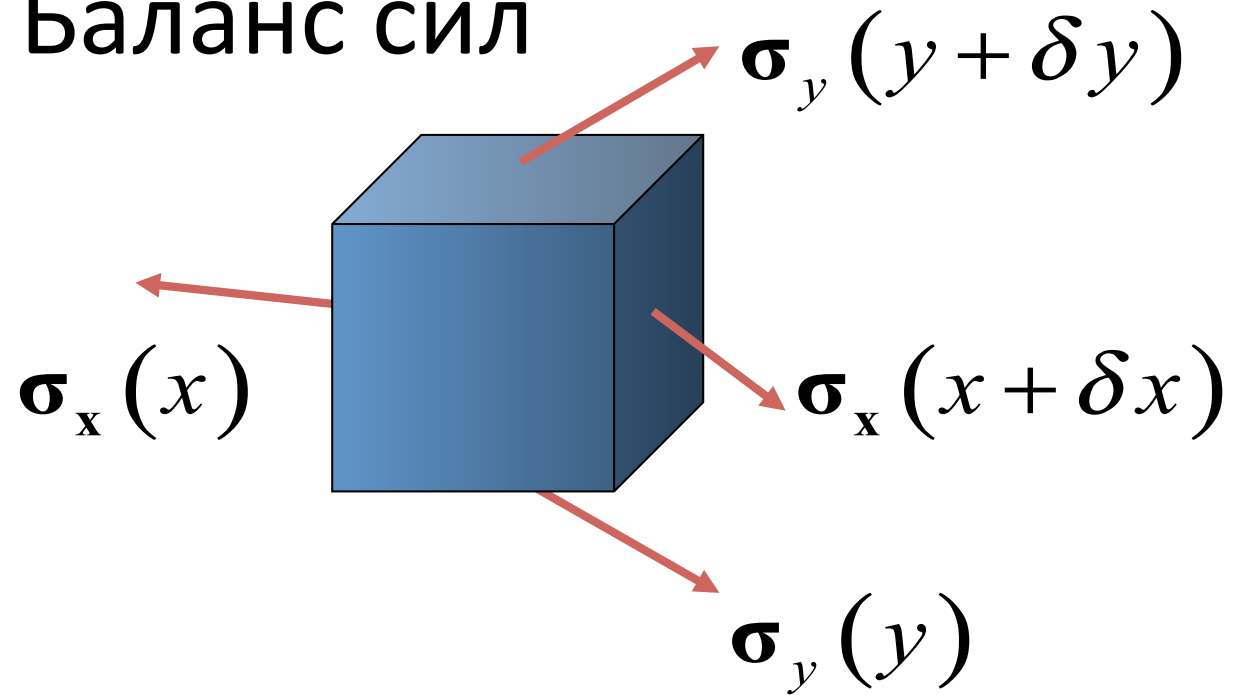
Нам нужны величины, которые не зависят от размера площадки!

# Проекции силы

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} \sigma_{yx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}$$



# Баланс сил



# 2-й закон Ньютона, проекция на ось X

$$m \vec{a} \Big|_x = m \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_x = \rho \{ \delta x \delta y \delta z \} \left( \frac{\partial \vec{V}_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}_x}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \rho g_x \delta x \delta y \delta z$$

Нормальное  
напряжение

Сдвиговое напряжение ( $\sigma_{zx}$ :  
напряжение, действующее на  
площадку, перпендикулярную оси  
z в направлении x)

Объемная сила

# 2-й закон Ньютона = уравнение сохранения импульса

$$m \vec{a} \Big|_x = F_x$$



$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \rho g_x$$

# Уравнения импульса



**x-компонента:**

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$



**y-компонента:**

$$\rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y$$



**z-компонента:**

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

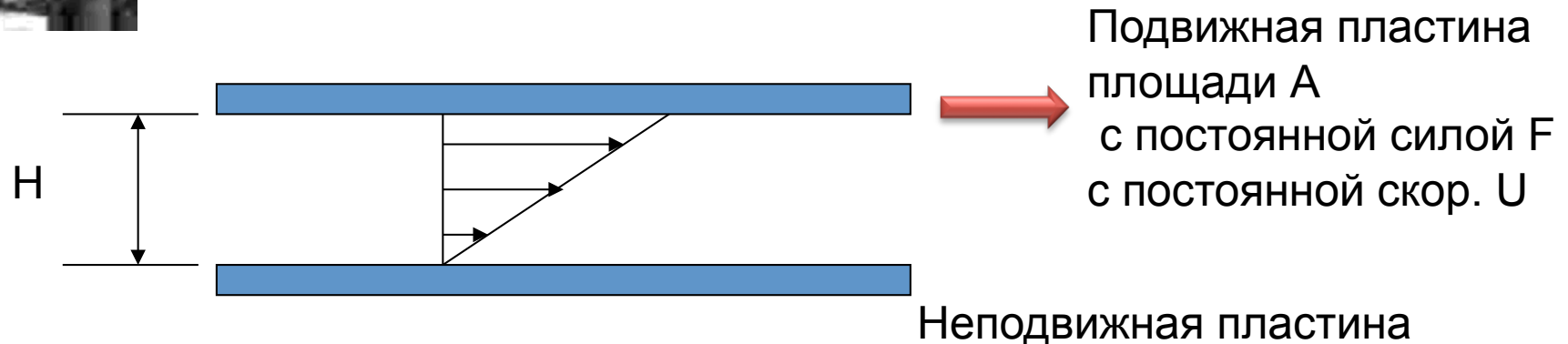
# Реологические соотношения

- Предыдущие уравнения не замкнуты. Они содержат плотность, скорость (3 компоненты) и напряжения (9 компонент)
- Надо выразить напряжения через скорости или что-нибудь еще.
- Обычно нормальные напряжения обозначают  $\sigma$ , а касательные -  $\tau$



**Maurice Couette**  
1858-1943

# Вязкая жидкость Опыт Куэтта



Из эксперимента ,  $F \sim A(U/H)=A(dV/dy)$

$$\sigma_{yx} = \tau_{yx} = \frac{F}{A} \sim \frac{dV}{dy}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV}{dy}$$

Касательное напряжение на стенке пропорционально скорости сдвига

$\mu$  – вязкость, коэффициент пропорциональности

**Вязкая жидкость прилипает к стенкам!**



# Связь между напряжениями и деформациями

При одномерном движении:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

В общем случае:

(сдвиговое напряжение) = (вязкость) × (скорость деформации)

➤ В декартовых координатах, в трехмерном случае:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

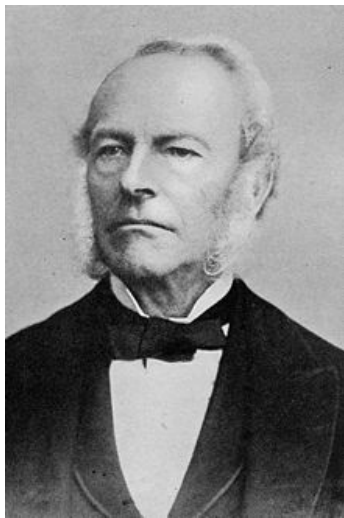
$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)$$

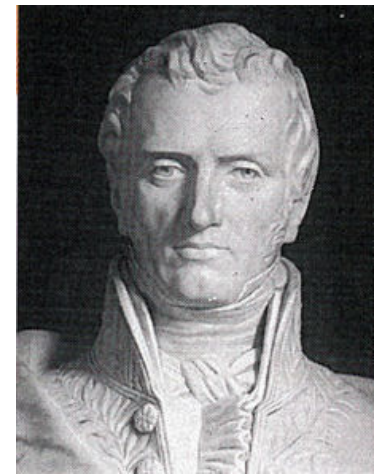
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)$$



Sir George Gabriel  
Stokes

# Уравнения Навье -Стокса (1822)

\$1,000,000 за построение  
общего решения



Claude Louis Marie  
Henri Navier



**x-component :**

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$



**y-component :**

$$\rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right)$$



**z-component :**

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$

# Давление

Рассмотрим покоящуюся жидкость в поле силы тяжести:

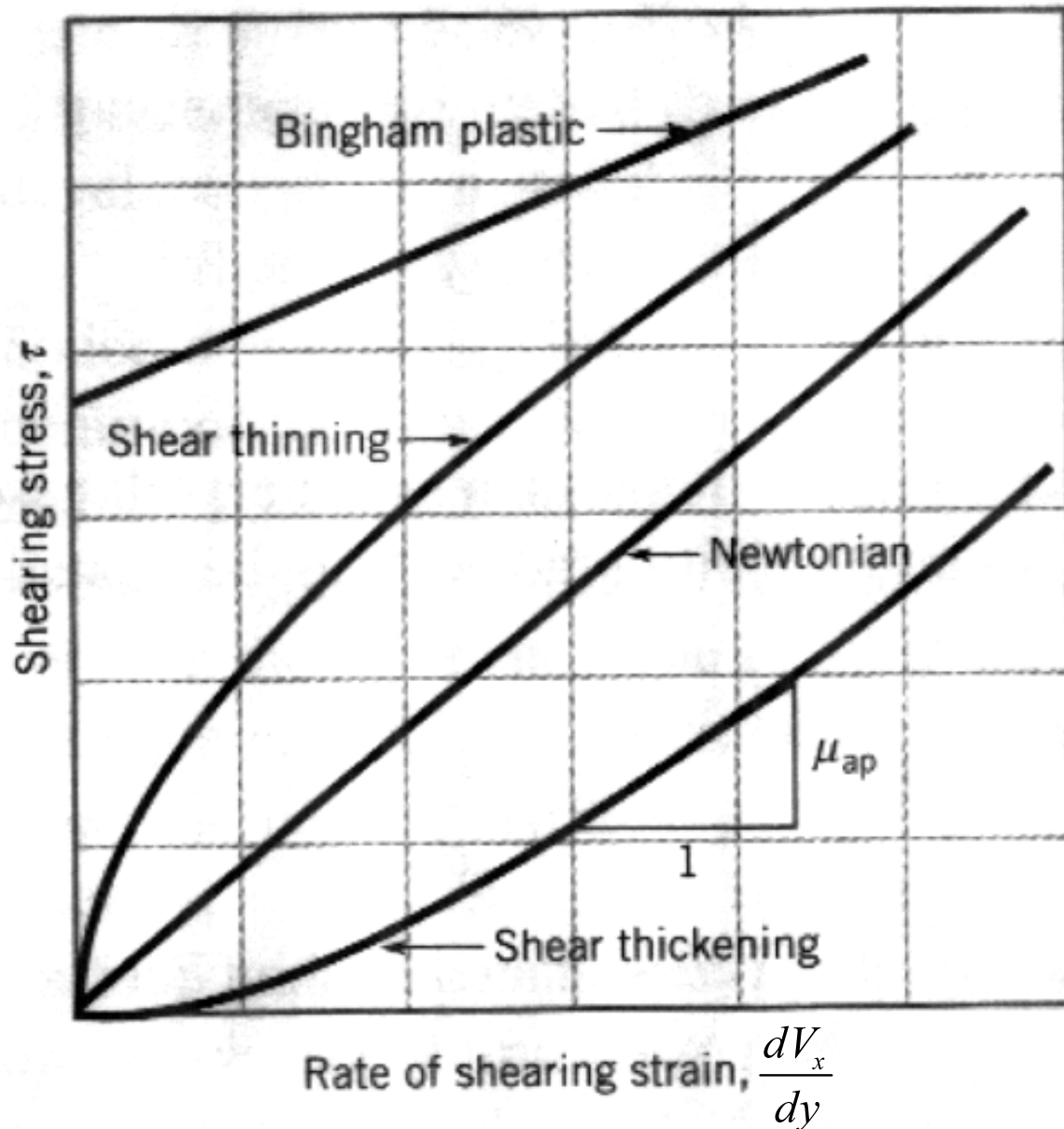
Направим ось  $z$  вертикально вниз, давление на поверхности жидкости равно атмосферному.

От всех уравнений Навье –Стокса останется:

$$\frac{dp}{dz} = \rho g \Rightarrow p = p_a + \rho g z$$



# Неньютоновские жидкости



$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

$$\mu = const$$

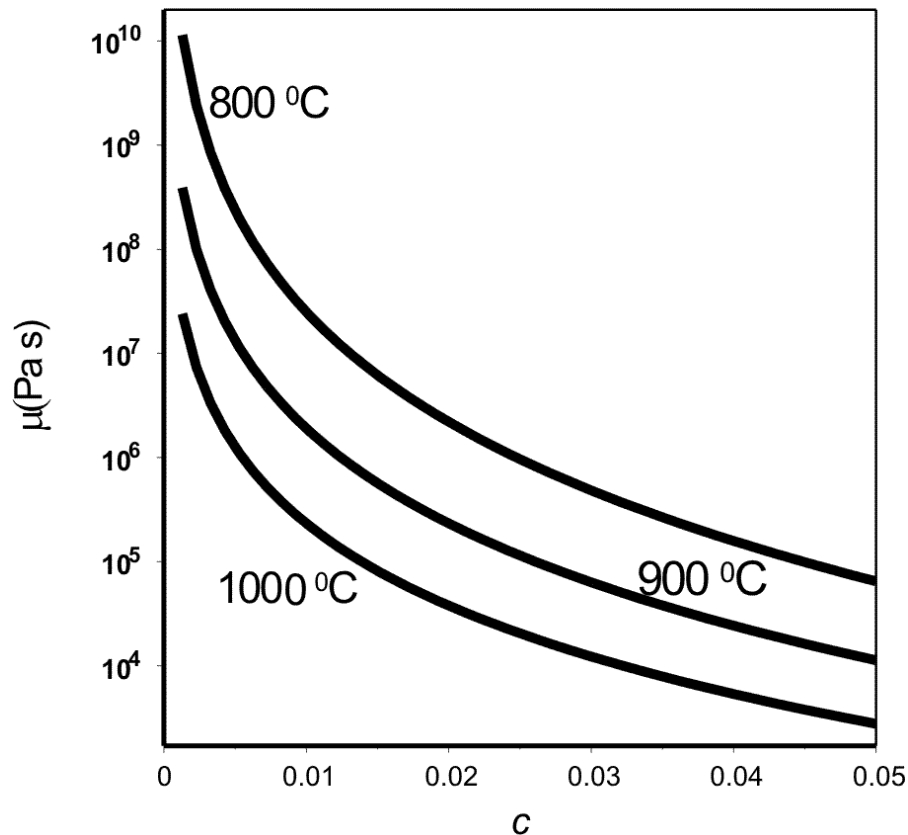
$$\mu = F\left(\frac{dV_x}{dy}, \tau_Y, T, X\right)$$

$$\mu = A\left(\frac{dV_x}{dy}\right)^n$$

# Реология магмы (расплава)

$$\mu = F \left( \frac{dV_x}{dy}, \tau_Y, T, X \right)$$

Hess K-U, Dingwell DB (1996)  
Viscosities of hydrous leucogranitic  
melts: a non-Arrhenian model. Am  
Mineral 81:1297–1300



Сильная зависимость вязкости  
расплава от температуры и  
концентрации растворенной воды.

Пар =  $10^{-5}$

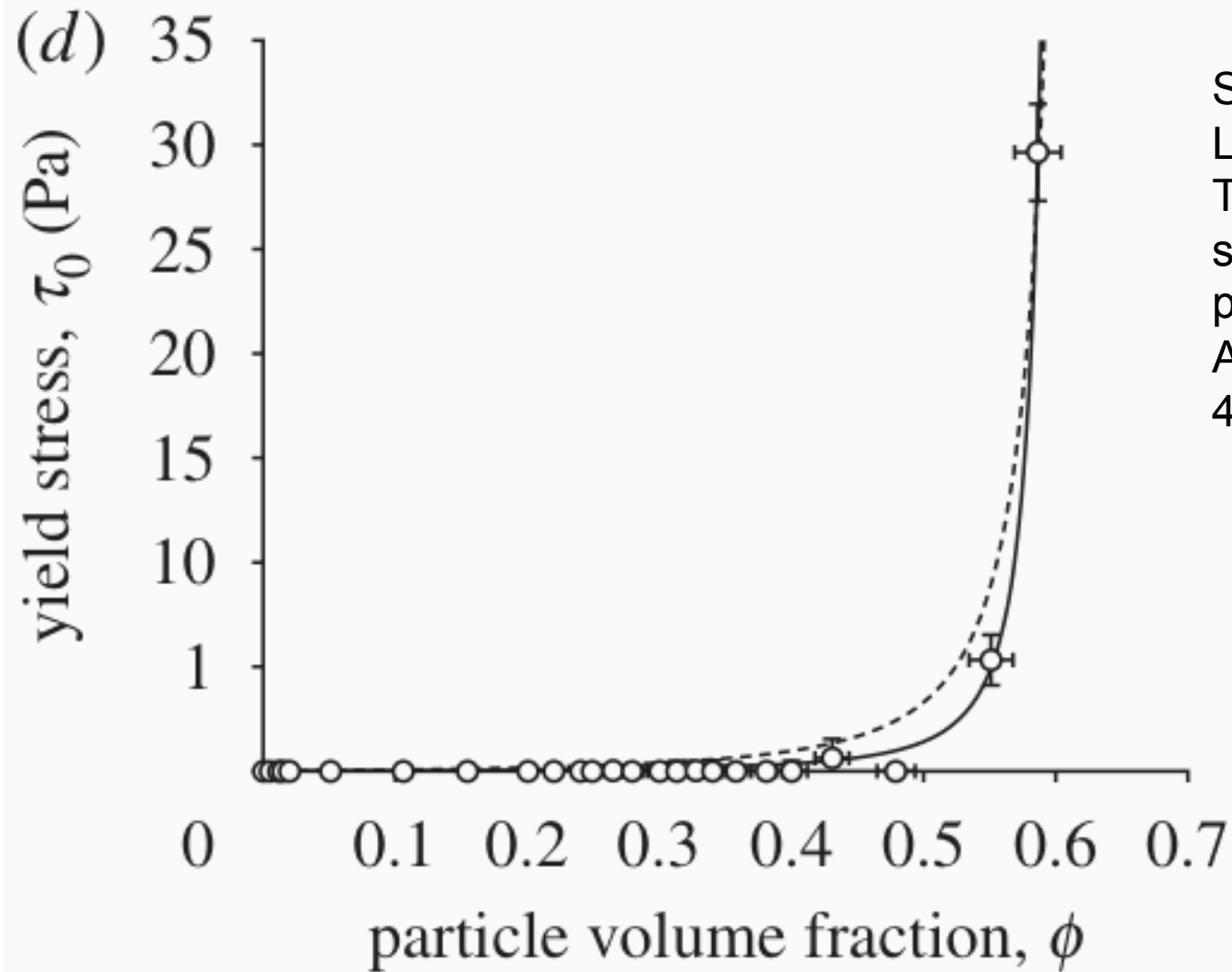
Вода =  $10^{-3}$

Мёд = 10

Битум  $10^2$

Pa s

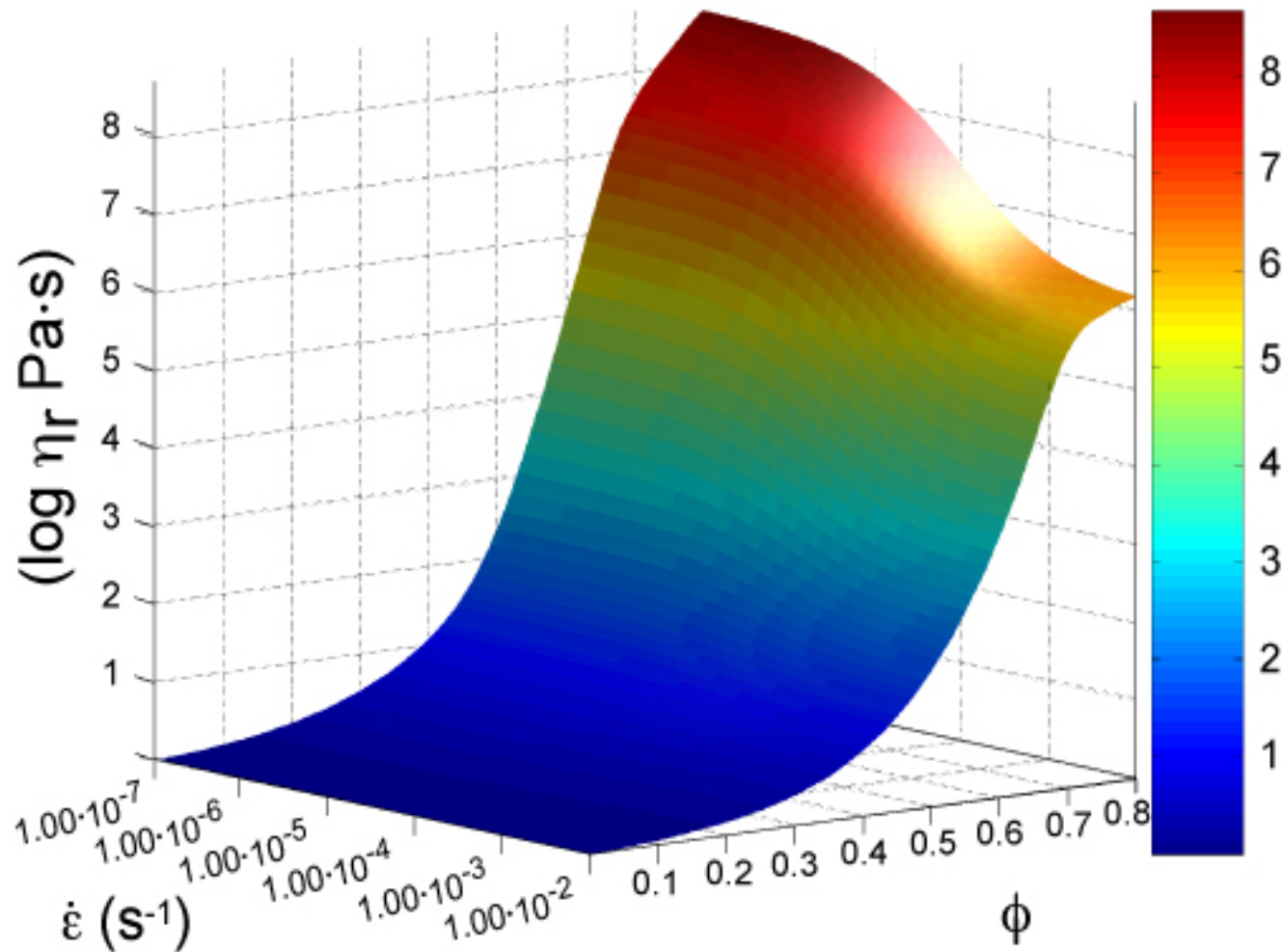
# Предел текучести



S. Mueller, E. W.  
Llewellyn, H. M. Mader  
The rheology of  
suspensions of solid  
particles Proc. R. Soc. A  
April 8, 2010  
466:1201-1228;

# Зависимость от концентрации кристаллов и скорости сдвига

Luca Caricchi, Luigi Burlini, Peter Ulmer, Taras Gerya, Melissa Vassalli and Paolo Papale **Non-Newtonian rheology of crystal-bearing magmas and implications for magma ascent dynamics**

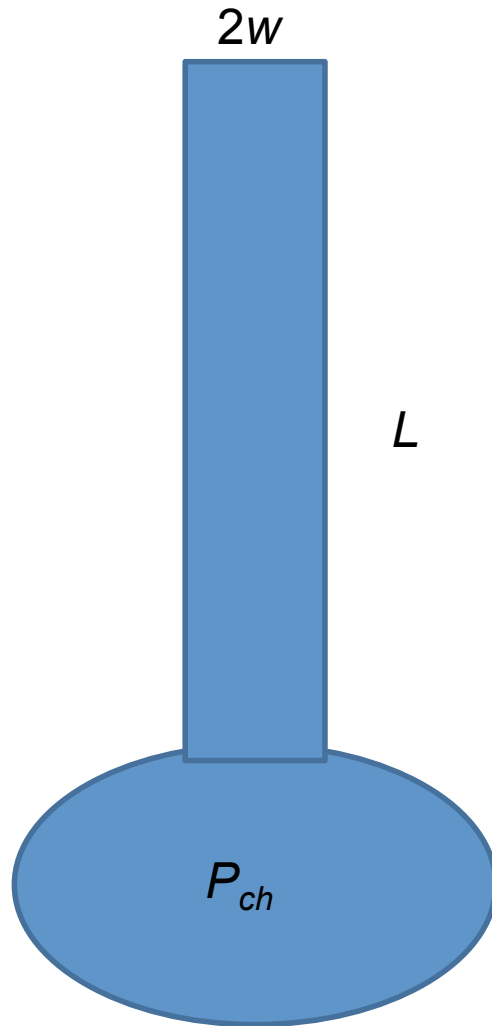


**УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА  
МОЖНО РЕШИТЬ!**

**ИНОГДА ☹️**



# Наша 1-я модель вулканического извержения.



- Чтобы понять опасен ли вулкан надо посчитать возможный расход магмы!
- Пусть в очаге скопилась магма с давлением  $P_{ch}$
- Канал вулкана – щель толщины  $2w$ , ширины  $h$  и длины  $L$ .
- Вязкость магмы постоянна.
- Плотность магмы тоже постоянна

# Течение несжимаемой магмы в плоской дайке

Течение стационарно (не зависит от времени)

Жидкость несжимаемая

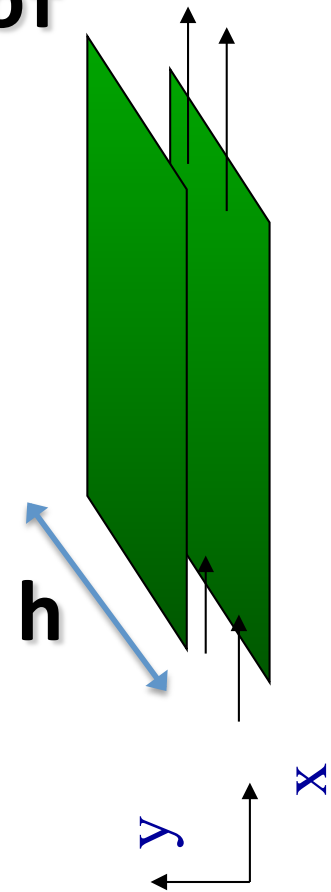
$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$V_y = V_z = 0$$

Сила тяжести отсутствует

(ее можно учесть, если вместо

давления ввести  $p^* = p - \rho g x$ )



Из закона сохранения массы

$$\frac{\partial(V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(V_z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_x(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x = V_x(y)$$

# Уравнения импульсов

**x-component :**

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

**y-component :**

$$\rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

**z-component :**

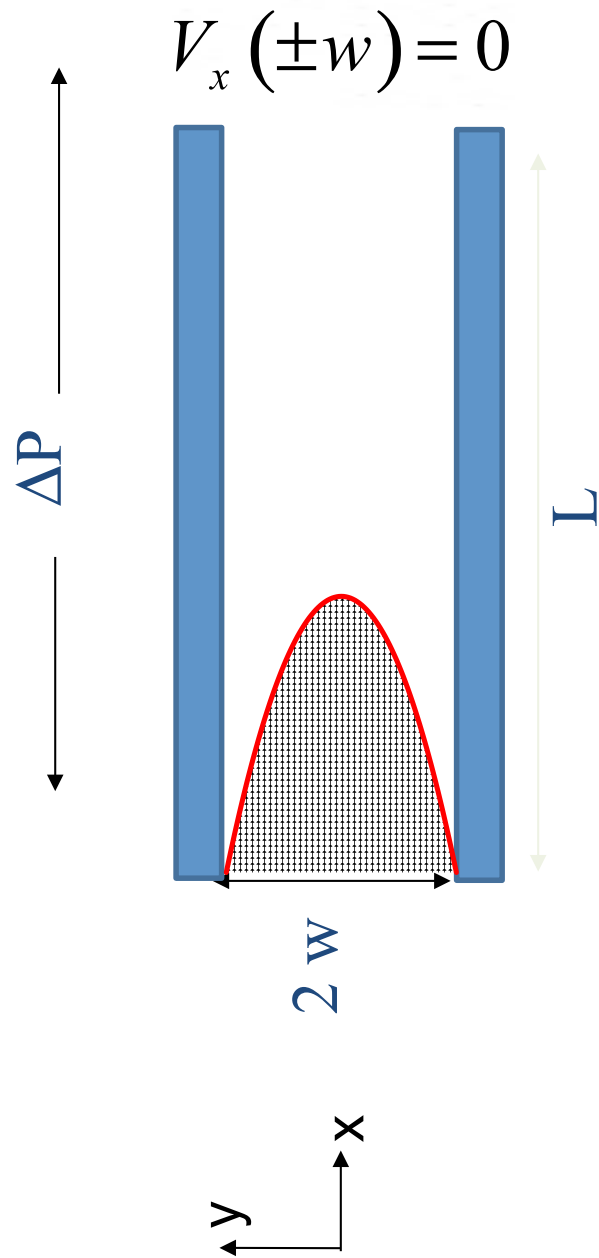
$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow p = p(x)$$

# Профиль скорости



Jean-Louis Marie  
Poiseuille  
(1799-1869)



$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{d}{dx} p = \mu \frac{d^2 V_x}{dy^2} = \text{const}$$

$\Downarrow$

$$V = a + by + cy^2$$

$\Updownarrow$

$$V_x = V_{\max} \left( 1 - \left( \frac{y}{w} \right)^2 \right)$$

# Связь расхода и скорости

$$Q = h \int_{-w}^w V(y) dy = h V_{\max} \int_{-w}^w \left( 1 - \left( \frac{y}{w} \right)^2 \right) dy =$$
$$= h V_{\max} y \Big|_{-w}^w - \frac{h V_{\max}}{3w^2} y^3 \Big|_{-w}^w = V_{\max} \frac{4}{3} wh$$

Введем среднюю скорость:  $V_{av} = V = \frac{Q}{2wh}$

Тогда:  $V_{av} = \frac{Q}{2wh} = V_{\max} \frac{4}{3 \cdot 2wh} wh = \frac{2}{3} V_{\max}$

# Связь средней скорости с перепадом давления

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P}{L} &= \mu \frac{d^2 V_x}{dy^2} = \frac{3}{2} \mu V_{av} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( 1 - \left( \frac{y}{w} \right)^2 \right) = \\ &= -\frac{3}{w^2} \mu V_{av} = -\frac{3}{2w^3 h} \mu Q\end{aligned}$$

Отсюда расход:

$$Q = -\frac{2w^3 h}{3\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

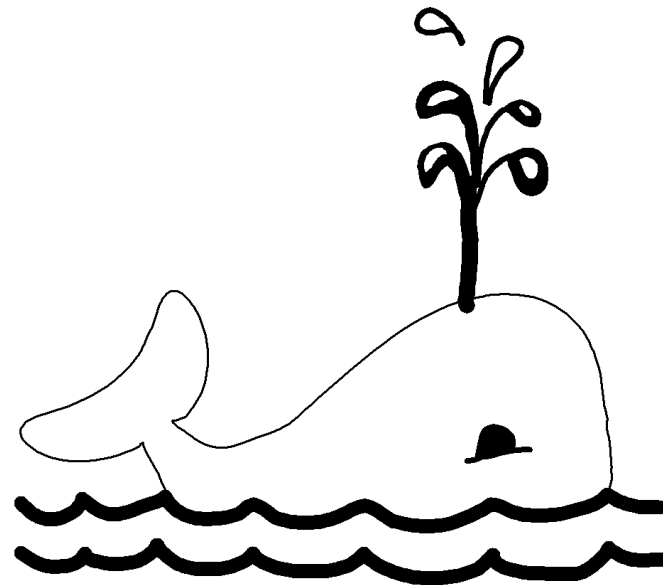
# Пример

- Щелевой канал  $w = 5$  м,  $h = 200$  м,  $L = 5000$  м,  $\Delta P = 10$  МПа,  $\mu = 10^5$  Па с,  $Q = ?$

$$Q = -\frac{2w^3h}{3\mu} \frac{\Delta P}{L} = 333 \text{ m}^3 / \text{s}$$

= 8,3 китов/сек

При плотности  
магмы  $2500 \text{ кг/м}^3$   
и весе кита  $100 \text{ Т}$





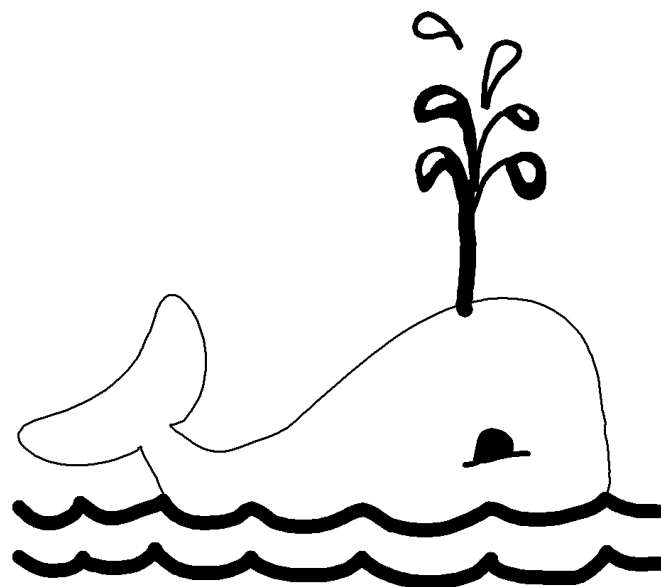
# Пример

- Цилиндрический канал  $D = 1000^{1/2}$  м,  $L = 5000$  м,  $\Delta P = 10$  МПа,  $\mu = 10^5$  Па с,  $Q = ?$

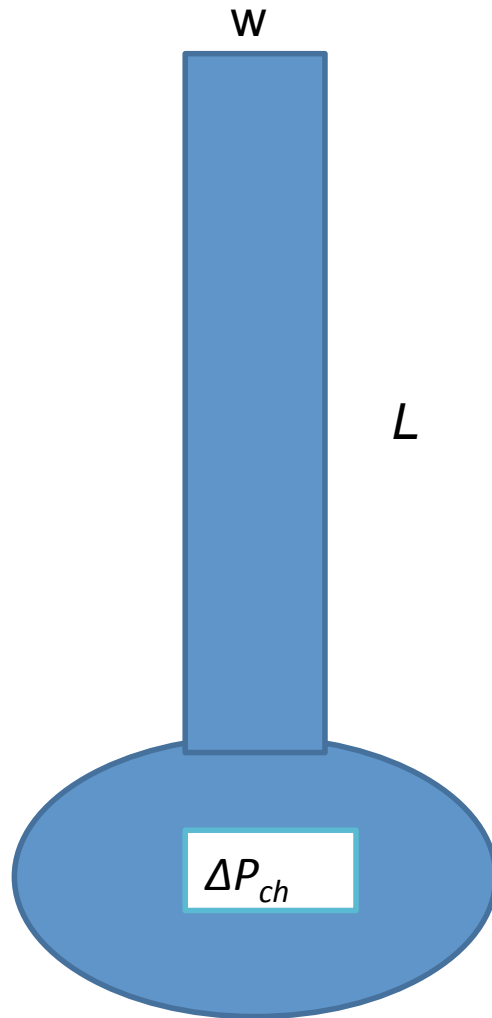
$$Q = V_{av} \frac{\pi D^2}{4} = - \frac{\pi D^4}{128 \mu} \frac{\Delta P}{L} = 491 \text{ m}^3/\text{s}$$

= 12,3 китов/сек

При плотности  
магмы  $2500 \text{ кг/м}^3$   
и весе кита  $100 \text{ Т}$



# Наша 2-я модель вулканического извержения.



- Пусть в очаге скопилась магма с давлением  $\Delta P_{ch0}$
- Канал вулкана – щель с размерами  $w \times h$  и длины  $L$ .
- Вязкость магмы постоянна.
- Плотность магмы тоже постоянна
- Очаг находится в упругих породах,  $\Delta P_{ch} = \beta \Delta V_{ch}$

Соберем  
воедино!

$$Q(t) = -\frac{2w^3h}{3\mu} \frac{\Delta P(t)}{L}$$

$$\Delta P(t) = \beta \Delta V(t)$$

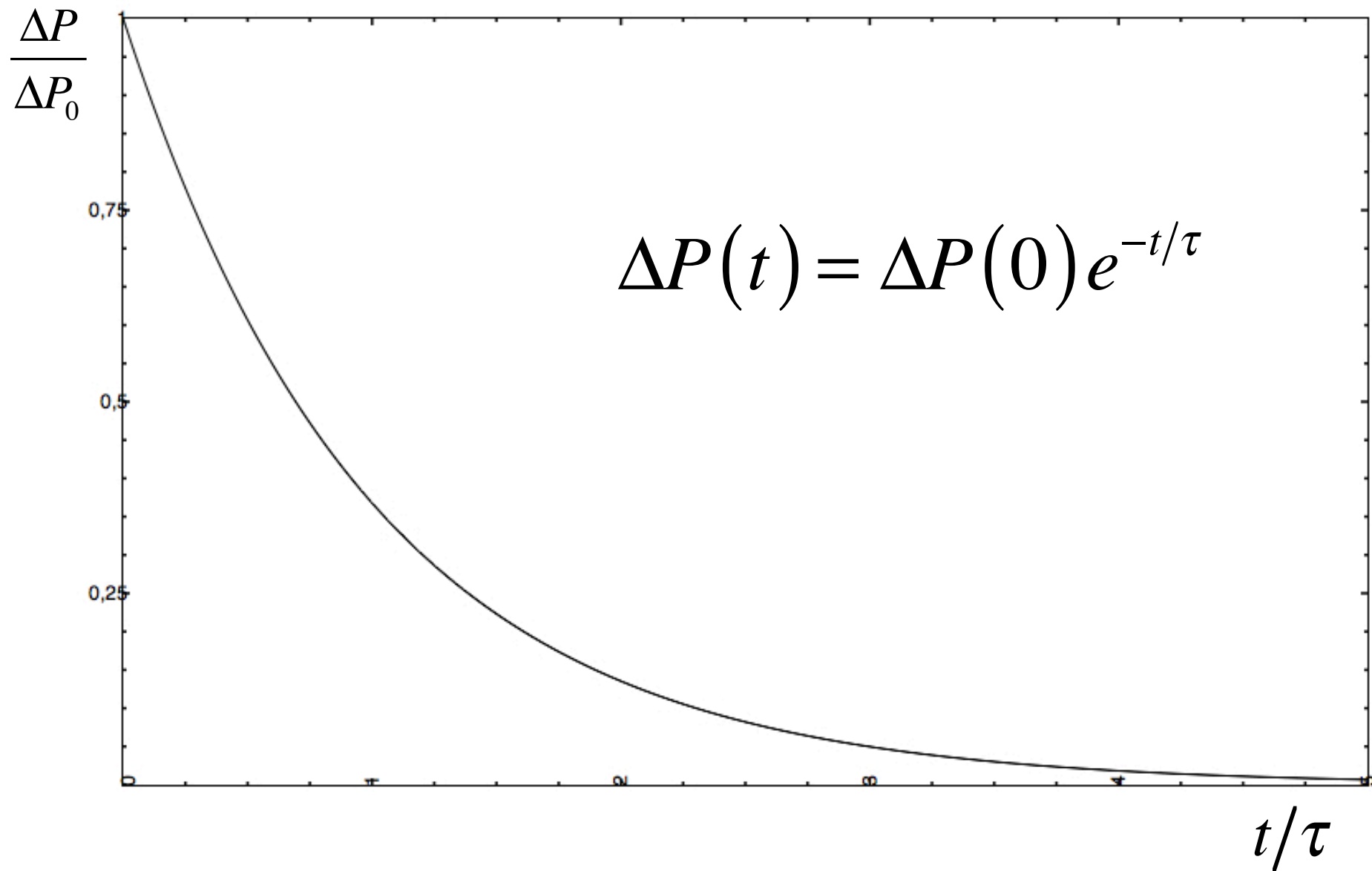
$$\frac{d\Delta P(t)}{dt} = \beta \frac{d\Delta V(t)}{dt} = \beta Q(t)$$

⇓

$$\boxed{\frac{d\Delta P(t)}{dt}} = -\beta \frac{2w^3h}{3\mu} \frac{\Delta P(t)}{L} = \boxed{-\frac{1}{\tau} \Delta P(t)}$$

Если очаг  
сферический в  
упругих породах,  
то  $\beta = E/V_{ch}$

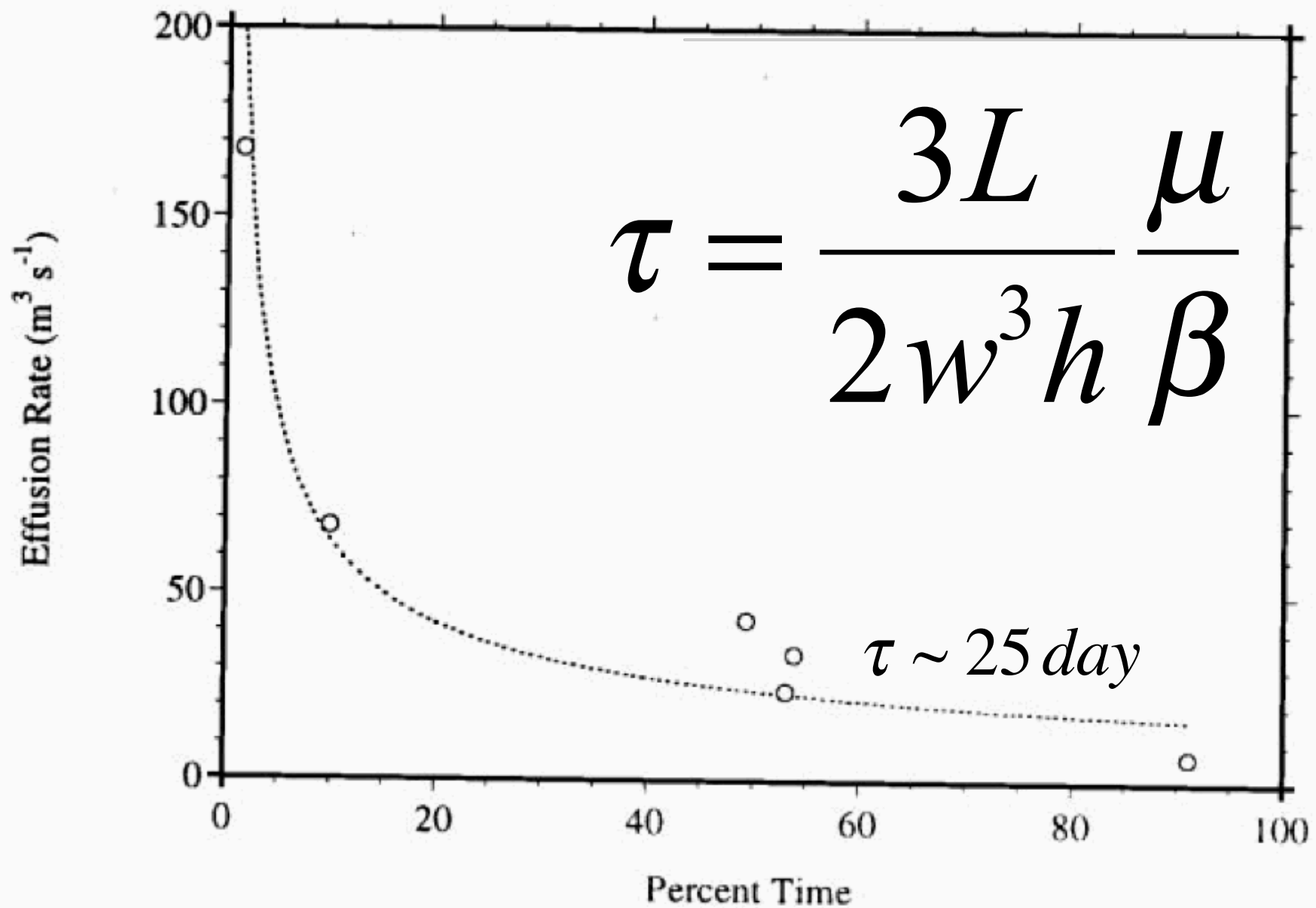
# Решение уравнения



# Вулкан Крафла, Исландия



От чего зависит продолжительность извержения



# Какой же размер очага для вулкана Крафла?



$E = 10$  ГПа, другие  
параметры как в  
нашей  
предыдущей  
модели.

Результат  
представить в  
 $\text{км}^3$  и в китах

# Итак:

- Вывели страшные уравнения, которые описывают движение жидкости.
- Выяснили от чего зависит вязкость магмы.
- Нашли простые и полезные решения страшных уравнений.
- Построили простую модель извержения, которая позволяет оценить параметры вулканической системы по данным наблюдения.
- Узнаем, что не все так просто ☹️