- Подъем магмы в каналах и дайках. Течение Пуазейля. Сила сопротивления канала вулкана.
- Моделирование течения многофазных сред. Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Система уравнений, описывающая многофазное, многоскоростное течение.
- Модели взаимодействия между фазами, обтекание пузырька и твердой частицы.
- Фильтрация газа. Закон Дарси. Дегазация магм

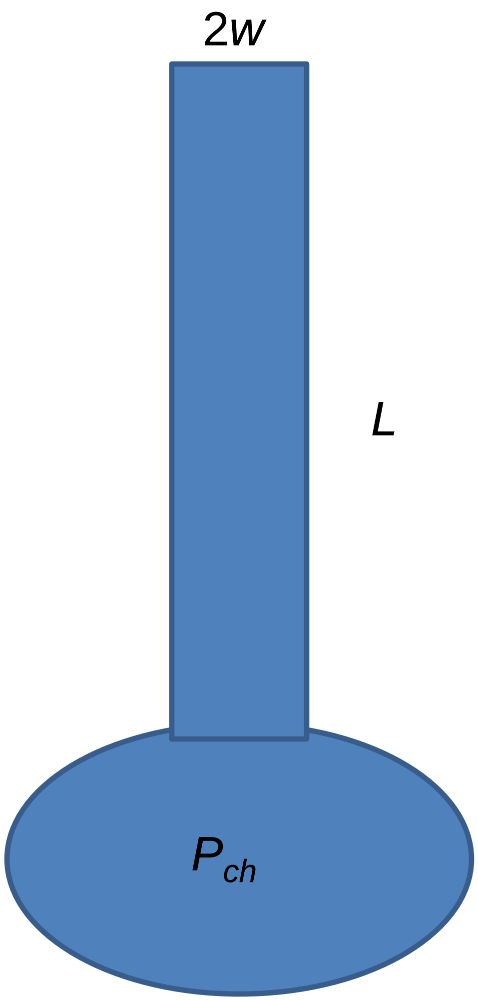
МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ

ТЕЛ 939-5476, EMAIL: MELNIK@IMEC.MSU.RU

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА МОЖНО РЕШИТЬ!

ИНОГДА L

Наша 1-я модель вулканического извержения.



- Чтобы понять опасен ли вулкан надо посчитать возможный расход магмы!
- Пусть в очаге скопилась магма с давлением P_{ch}
- Канал вулкана – щель ширины $2w$ и длины L.
- Вязкость магмы постоянна.
- Плотность магмы тоже постоянна

У нас есть уравнения!

Уравнения Навье-Стокса (ρ =const, μ=const)

x-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

y-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

z-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z$$

Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

Течение несжимаемой магмы в плоской дайке

Течение стационарно (не зависит от времени)

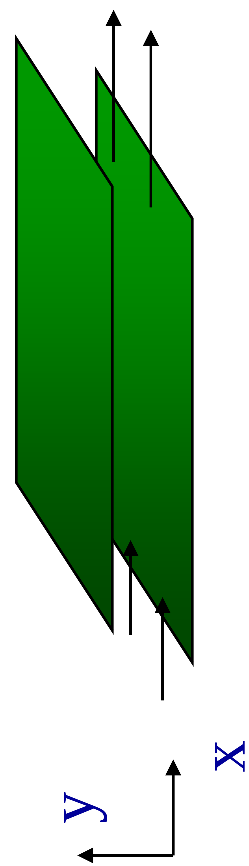
Жидкость несжимаемая $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

$V_y = V_z = 0$

Сила тяжести отсутствует

(ее можно учесть, если вместо

давления ввести $p^* = p - \rho g x$)



Из закона сохранения массы

$$\frac{\partial(V_x)}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial(V_y)}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial(V_z)}{\partial z}}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}V_x\left(x,y\right)=0 \quad \Rightarrow \quad V_x=V_x\left(y\right)$$

Уравнения импульсов

x-component :

$$\cancel{\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}}+\boxed{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}}\right)+\cancel{\rho g_x}$$

y-component :

$$\cancel{\rho\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\cancel{\mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)}+\rho g_y$$

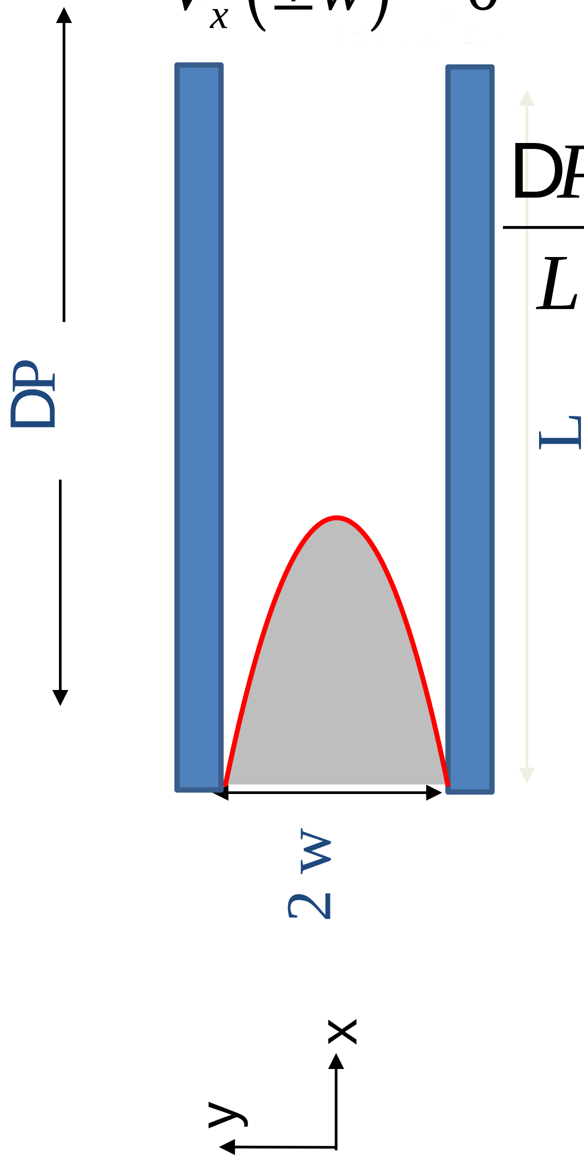
z-component :

$$\cancel{\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\cancel{\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)}+\rho g_z$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0 \Rightarrow \quad p=p(x)}$$

Профиль скорости

$$V_x(\pm w) = 0$$



$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{d}{dx} p = \mu \frac{d^2 V_x}{dy^2} = const$$

$$\Downarrow$$

$$V = a + by + cy^2$$

С учетом граничных условий

$$V_x = V_{\max}\left(1 - \left(\frac{y}{w}\right)^2\right)$$

Jean-Louis Marie Poiseuille (1799-1869)

Связь расхода и скорости

$$Q = \int_{-w}^{w} V\left(y\right) dy = V_{\max} \int_{-w}^{w} \left(1 - \left(\frac{y}{w}\right)^2\right) dy =$$

$$= V_{\max}\, y\Big|_{-w}^{w} - \frac{V_{\max}}{3w^2} y^3\Big|_{-w}^{w} = V_{\max} 2w - V_{\max} \frac{2w^3}{3w^2} = V_{\max} \frac{4}{3} w$$

Введем среднюю скорость: $V_{av} = V = \dfrac{Q}{2w}$

Тогда: $V_{av} = \dfrac{Q}{2w} = V_{\max} \dfrac{4}{3 \cdot 2\cancel{w}} \cancel{w} = \dfrac{2}{3} V_{\max}$

Связь средней скорости с перепадом давления

$$\frac{\Delta P}{L}=\mu\frac{d^2V_x}{dy^2}=\frac{2}{3}\mu V_{av}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(1-\left(\frac{y}{w}\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{3w^2}\mu V_{av}=-\frac{1}{6w^3}\mu Q$$

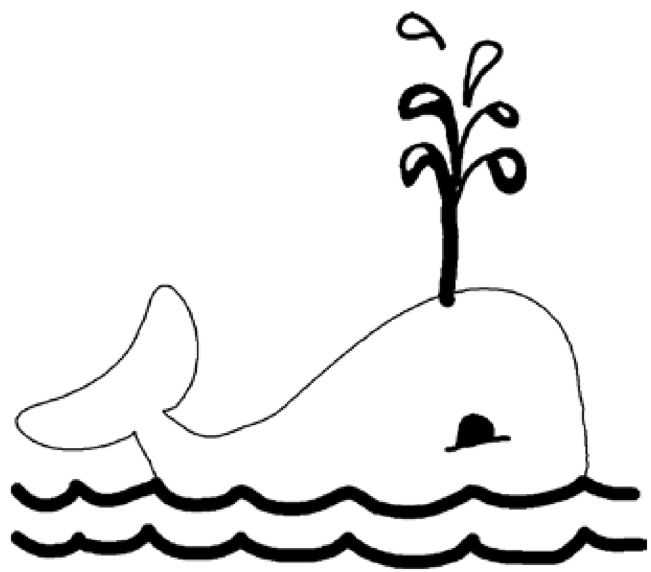
Отсюда расход: $$Q=-\frac{6w^3\Delta P}{\mu L}$$

Пример

- **Цилиндрический канал** $D \equiv 50$ m, $L \equiv 5000$, $\Delta P \equiv 10$ MPa, $\mu \equiv 10^5$ Pa s, **Q-?**

$$Q = V_{av}\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^4}{128\mu}\frac{\Delta P}{L} = 3066\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

= 76,65 китов/сек
При плотности
магмы 2500 кг/м^3
и весе кита 100 Т



Сила и коэффициент сопротивления канала

- Перепишем уравнение в гидравлическом приближении

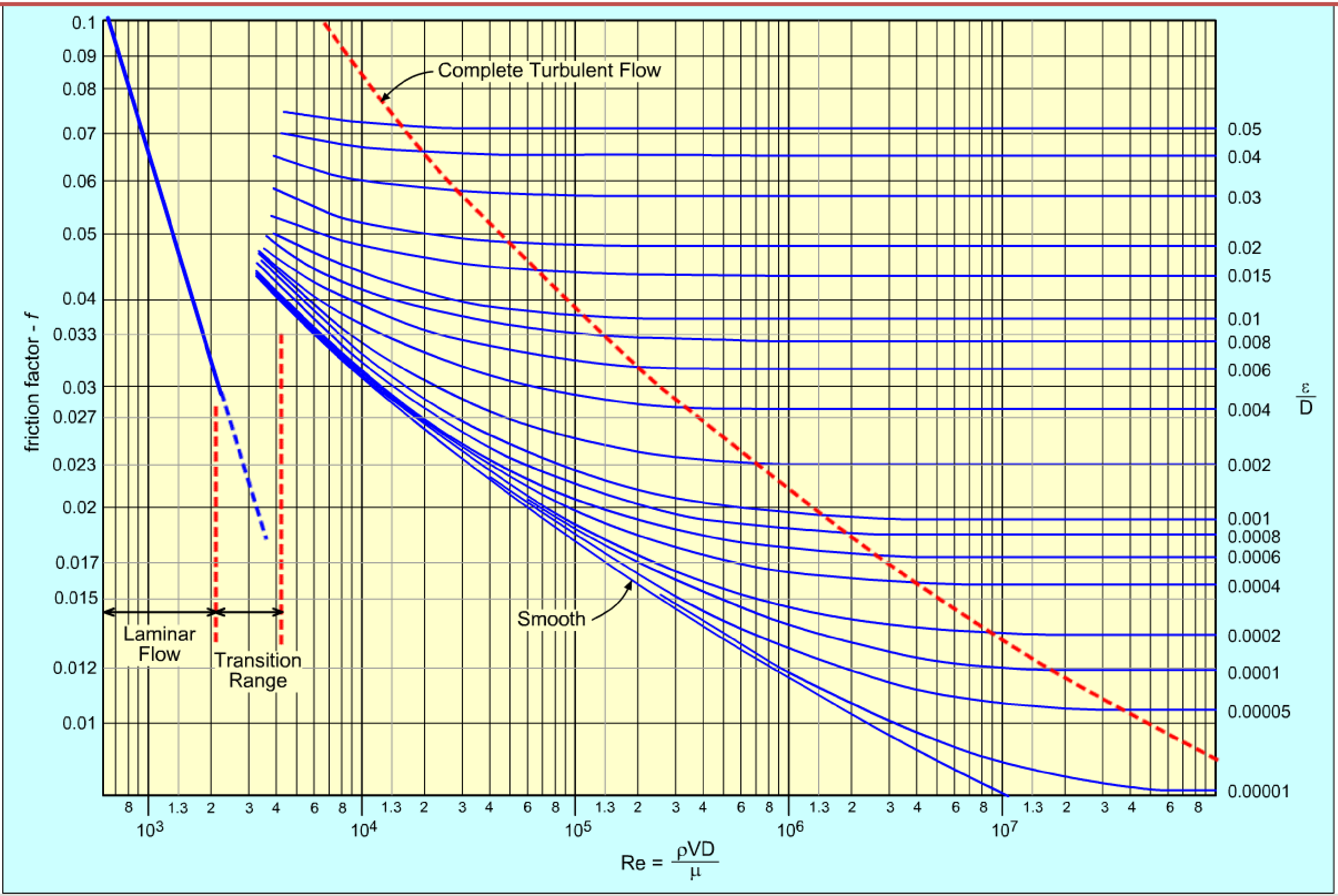
$$\frac{dp}{dx} = - r\, g - \frac{32\, m V_{av}}{D^2} = - r\, g - / \frac{r V_{av}^2}{2D}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{r V_{av} D}{m}; \qquad / = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

<u>Для турбулентного режима:</u>

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left[\frac{2.51}{Re \times \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{D} \times 0.269\right]$$

Коэффициент сопротивления



Готово
ecourses.ou.edu

Промежуточные итоги

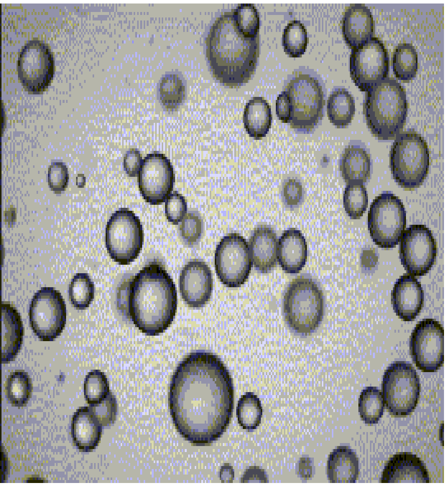
- Для стационарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью в цилиндрической трубе мы можем найти расход зная перепад давления на концах
- В магме к сожалению все сложнее…
- Поскольку магма многофазная, сжимаемая среда, ее вязкость сильно переменна, при взрывном извержении только часть канала занята вязкой жидкостью, а часть – газовзвесью.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД.

- Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Модели взаимодействия между фазами
- Обтекание пузырька и твердой частицы.

Описание дисперсных систем

пузырьки

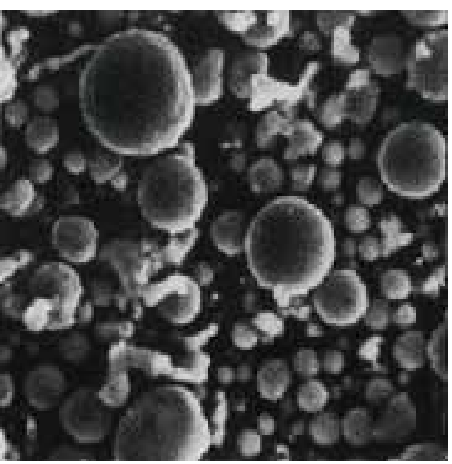


Параметры многофазных сред

$$\text{размазанная плотность} = \frac{\text{mass of component}}{\text{volume of mixture}} = \frac{m_i}{W_{mixture}} = r_i$$

$$\text{плотность чистой фазы} = \frac{\text{mass of component}}{\text{volyme of component}} = \frac{m_i}{W_i} = r_i^0$$

частицы



$$\text{объемная доля} = \frac{\text{volume of component}}{\text{volume of mixture}} = \frac{W_i}{W_{mixture}} = a_i$$

$$\text{массовая доля} = \frac{\text{mass of component}}{\text{mass of mixture}} = \frac{m_i}{m_{mixture}} = X_i$$

$$W_{mixture} = \mathring{a}\, W_i; \; m_{mixture} = \mathring{a}\, m_i$$

Параметры смеси

$$\text{скорость компоненты} = \frac{\sum m_{ij} V_{ij}}{m_i} = V_i$$

$$\text{массовая скорость смеси} = \frac{\sum \rho_i V_i}{\rho_{mixture}}$$

$$\rho_{mixture} = \sum \rho_i$$

Уравнения неразрывности $\leftarrow$ **Потоки массы**

Уравнения импульса $\leftarrow$ **Силовое взаимодействие**

Структура уравнений для двухфазной смеси (1D)

$$\frac{\partial \rho_g^0 \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 \alpha V_g}{\partial x} = J_{\lg}; \quad \frac{\partial \rho_l^0 \left(1-\alpha\right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l^0 \left(1-\alpha\right) V_l}{\partial x} = -J_{\lg};$$

$$\rho_g^0 \alpha \left(\frac{\partial V_g}{\partial t} + V_g \frac{\partial V_g}{\partial x} \right) = -\alpha \frac{\partial p_g}{\partial x} - F_{gl} + g_g + \ldots$$

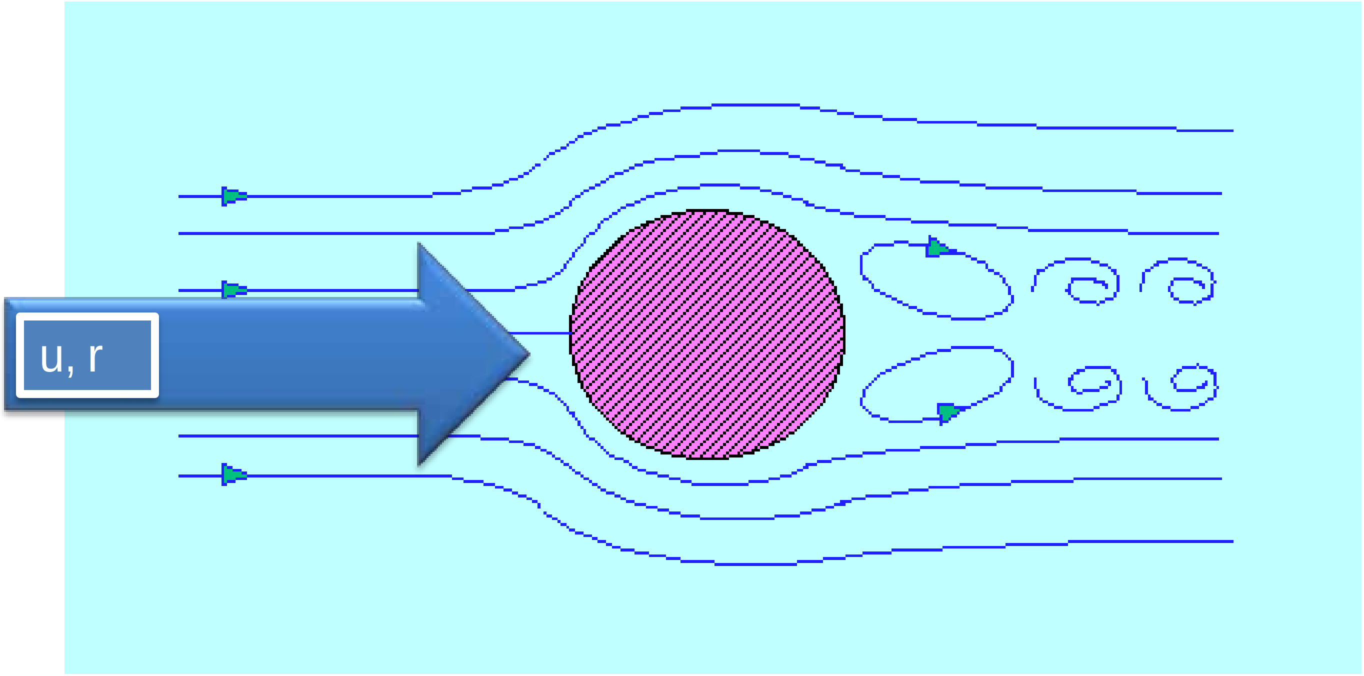
$$\rho_l^0 \left(1-\alpha\right) \left(\frac{\partial V_l}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_l}{\partial x} \right) = -\left(1-\alpha\right) \frac{\partial p_l}{\partial x} + F_{gl} + g_l + \ldots$$

$$\rho_l^0 = const; \quad \rho_g^0 = \frac{p_g}{R_g T}$$

За счет разности скоростей фаз происходит обтекание частиц или пузырьков, порождающее силы

СИЛЫ МЕЖФАЗНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Обтекание сферической частицы



Сила и коэффициент сопротивления

Полная сила, действующая на F_d частицу

$$F_d = C_D A_p \frac{\rho u^2}{2}$$

$$\mathrm{Re}_p = \frac{d_p u \rho}{\mu}$$

Коэффициент сопротивления

Площадь миделева сечения = $\pi d_p^2/4$

(1) $\mathrm{Re}_p < 2$, ламинарное (Закон Стокса)

$$C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}_p}$$

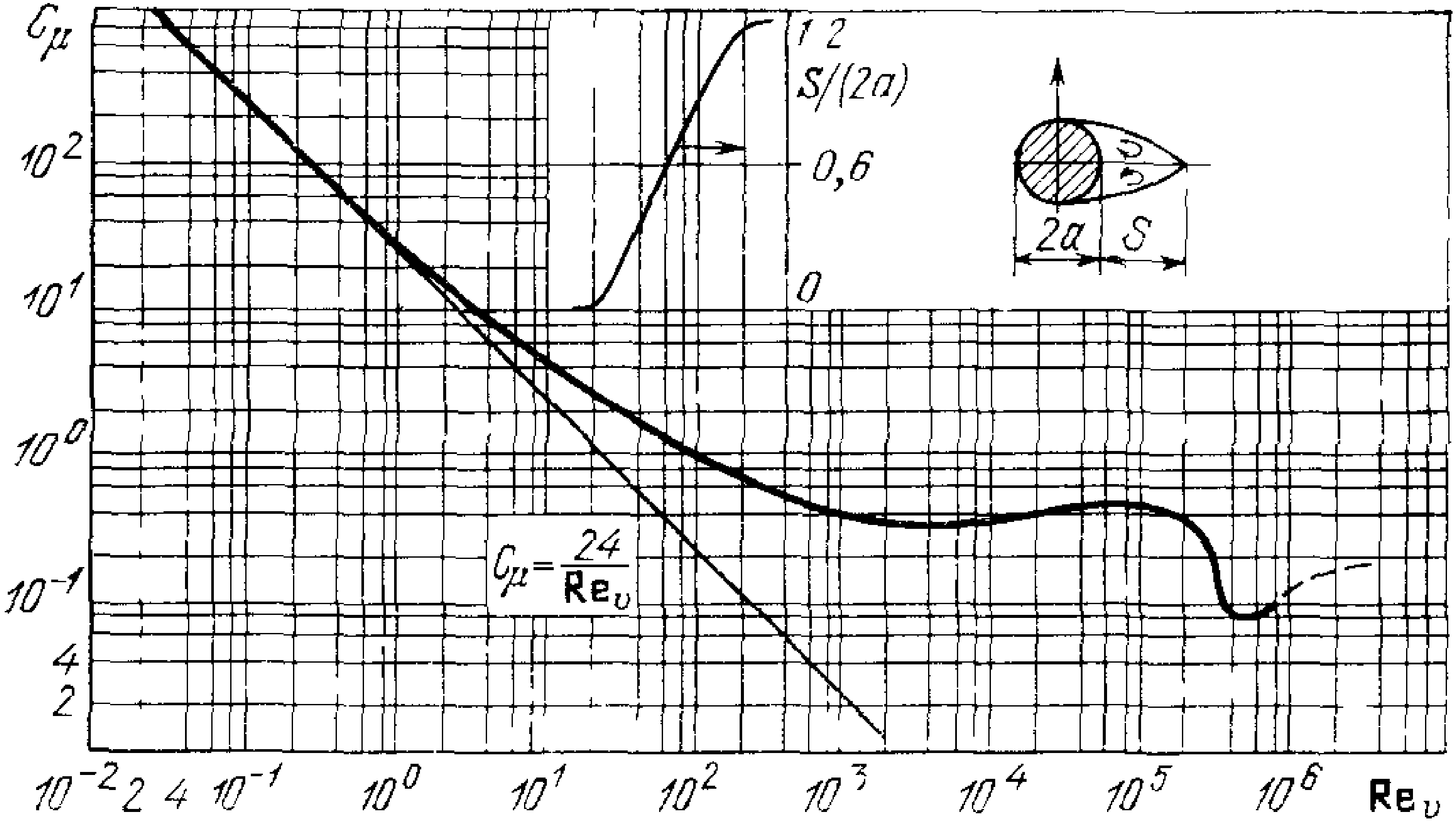
(2) $2 < \mathrm{Re}_p < 500$, переходное (Закон Аллена)

$$C_D = \frac{18.5}{\mathrm{Re}_p^{0.6}}$$

(3) $500 < \mathrm{Re}_p < 2\times10^5$, турбулентное (закон Ньютона)

$$C_D \approx 0.44$$

Коэффициент сопротивления в зависимости от Re

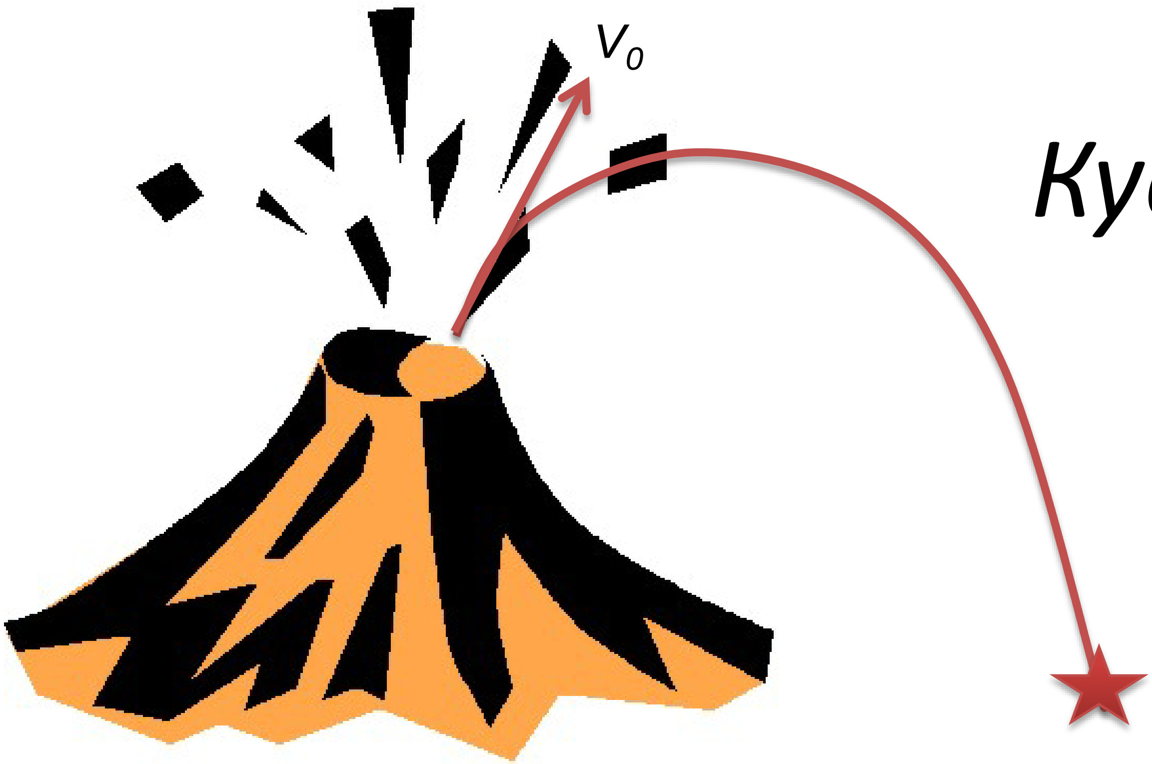


В случае трехмерного поля скоростей газа и движения частицы выражение для силы:

$$F_d = C_D A_p \frac{r_g \left| V_g - V_p \right| \left(V_p - V_g \right)}{2}$$

Полет вулканической бомбы

Итак вулкан изверг бомбу со скоростью V_0, под углом a, радиуса R



Вопрос!

Куда бежать?

Запишем уравнения движения бомбы.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma F$$

2-й закон Ньютона.

Или в проекции на оси координат

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F_{d,x} = C_D A_p \frac{\rho_g|\vec{V}|}{2}V_x;\ C_D \sim 0.5,\ A_p = \rho D^2$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - F_{d,y} = -mg - C_D A_p \frac{\rho_g|\vec{V}|}{2}V_y$$

$$V_x = \frac{dx}{dt};\ V_y = \frac{dy}{dt}$$

Траектория бомбы

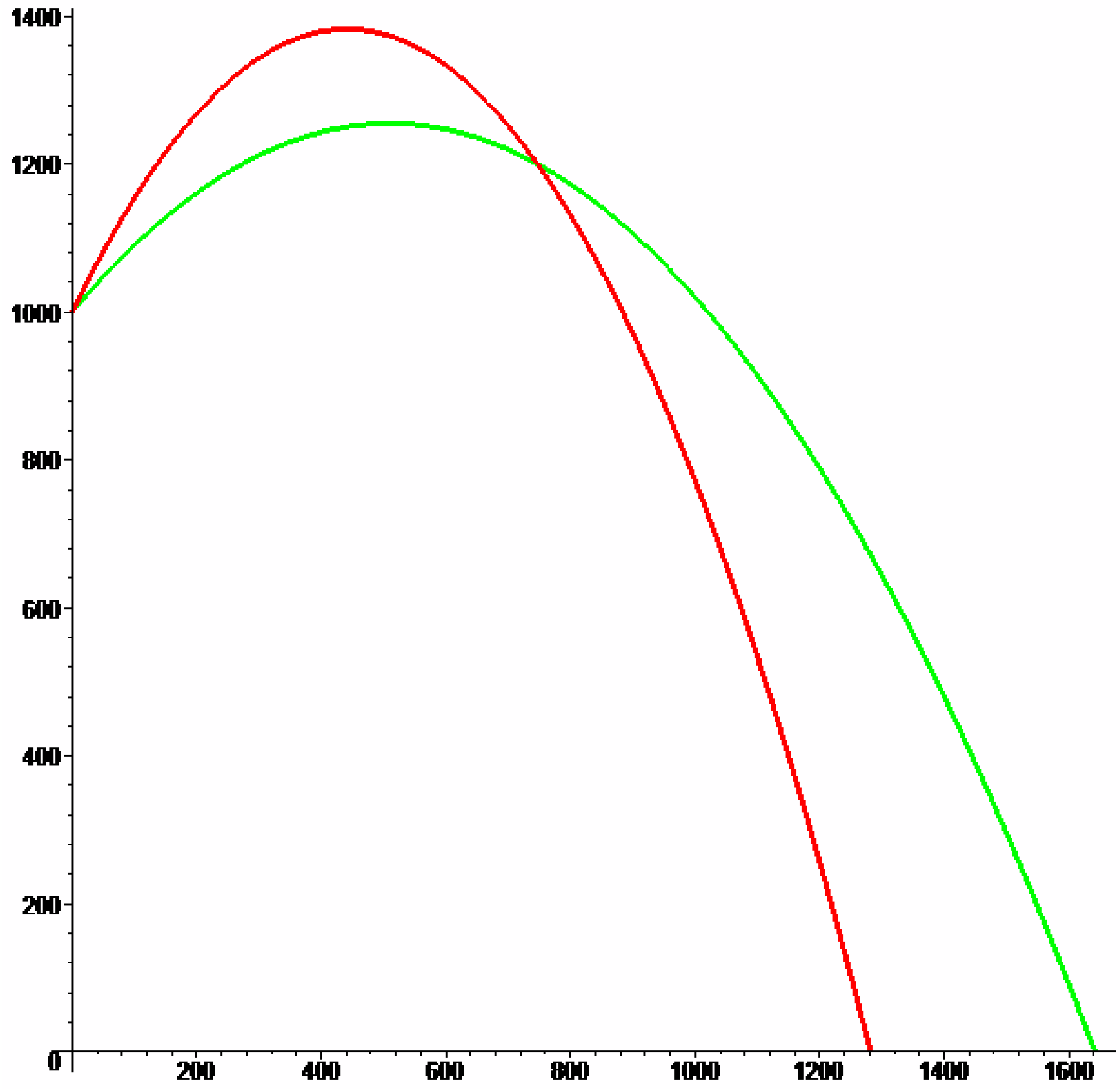
Начальная скорость 100 м/с
Начальный угол 45 и 60^{o}
Коэффициент сопротивления равен 0

Бомба летит по параболе.

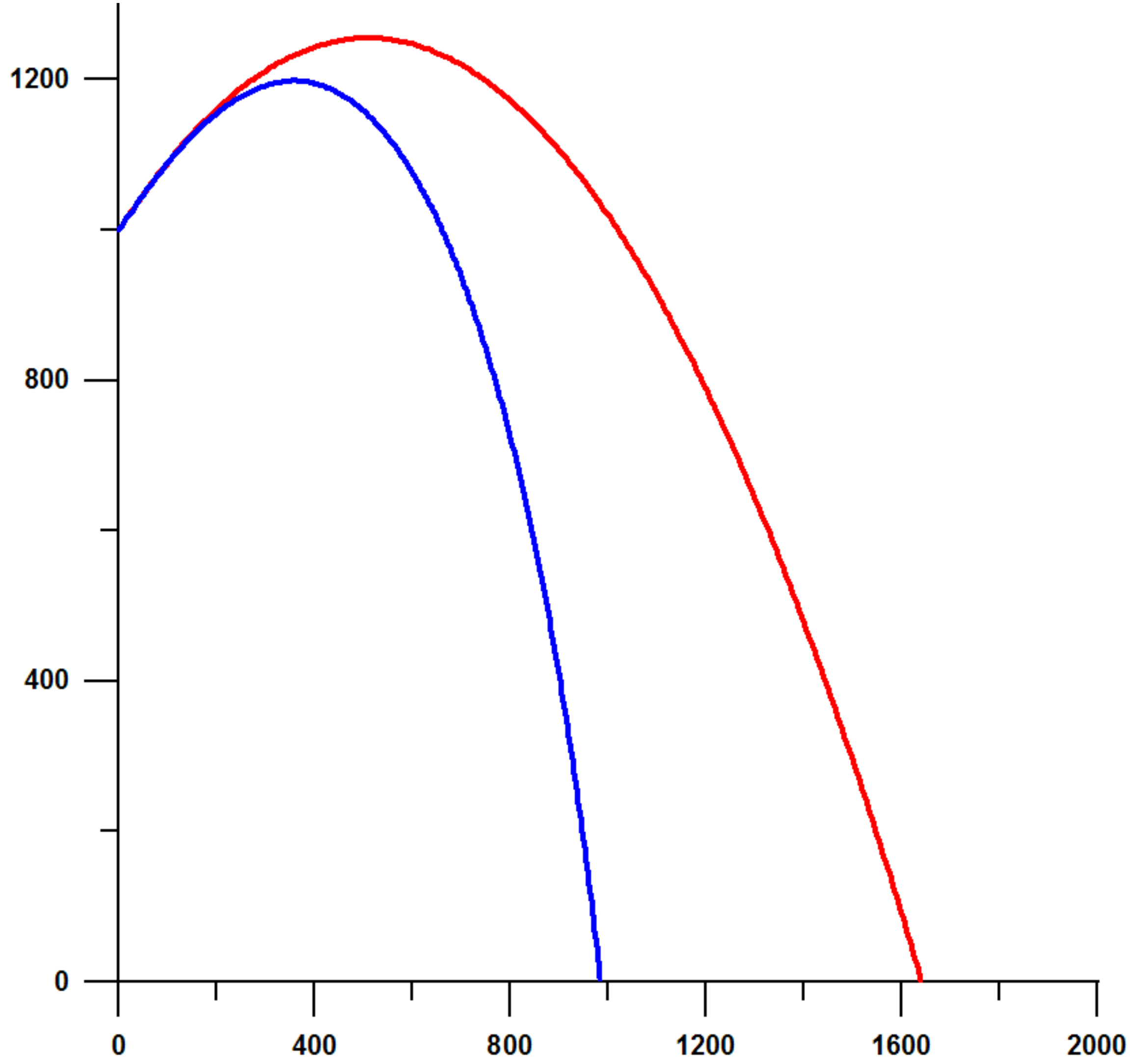
Времена падения 23 и 25 сек

ВЫВОД! Бежать бесполезно

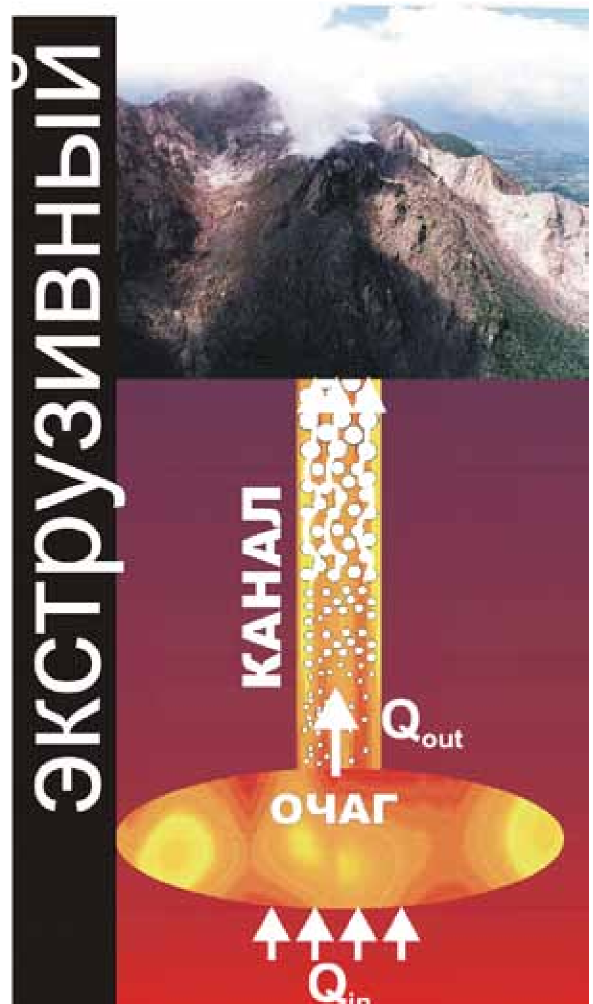
L



С учетом сопротивления бомба полетит не так далеко!



Движение газа в магме

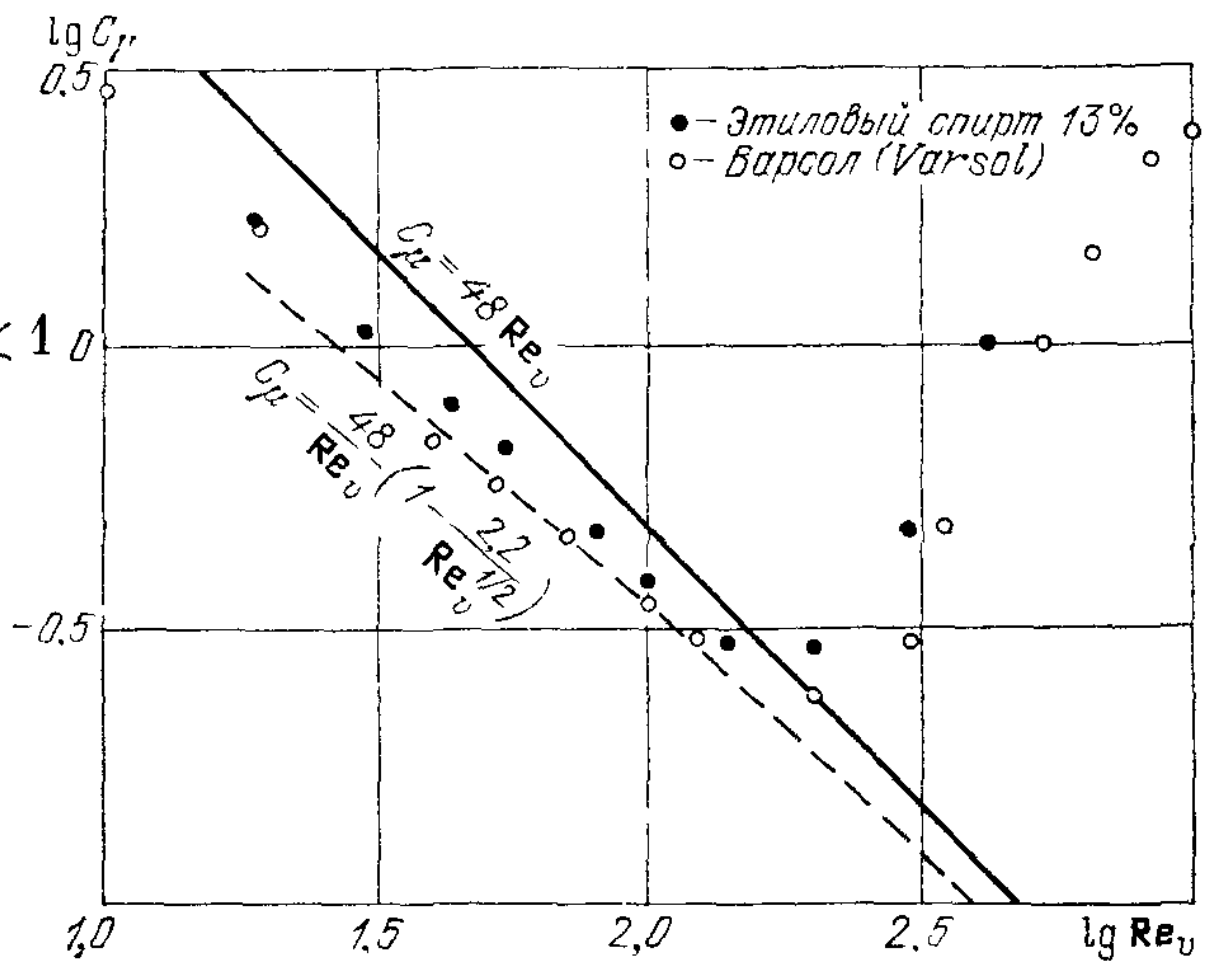


Скорость всплывания одиночного пузырька

При малых числах Рейнольдса

$$C_\mu = 16/\mathrm{Re}_v, \quad \mathrm{Re}_v \ll 1$$

$$\mathrm{Re}_v = \frac{R r_l V}{m}$$

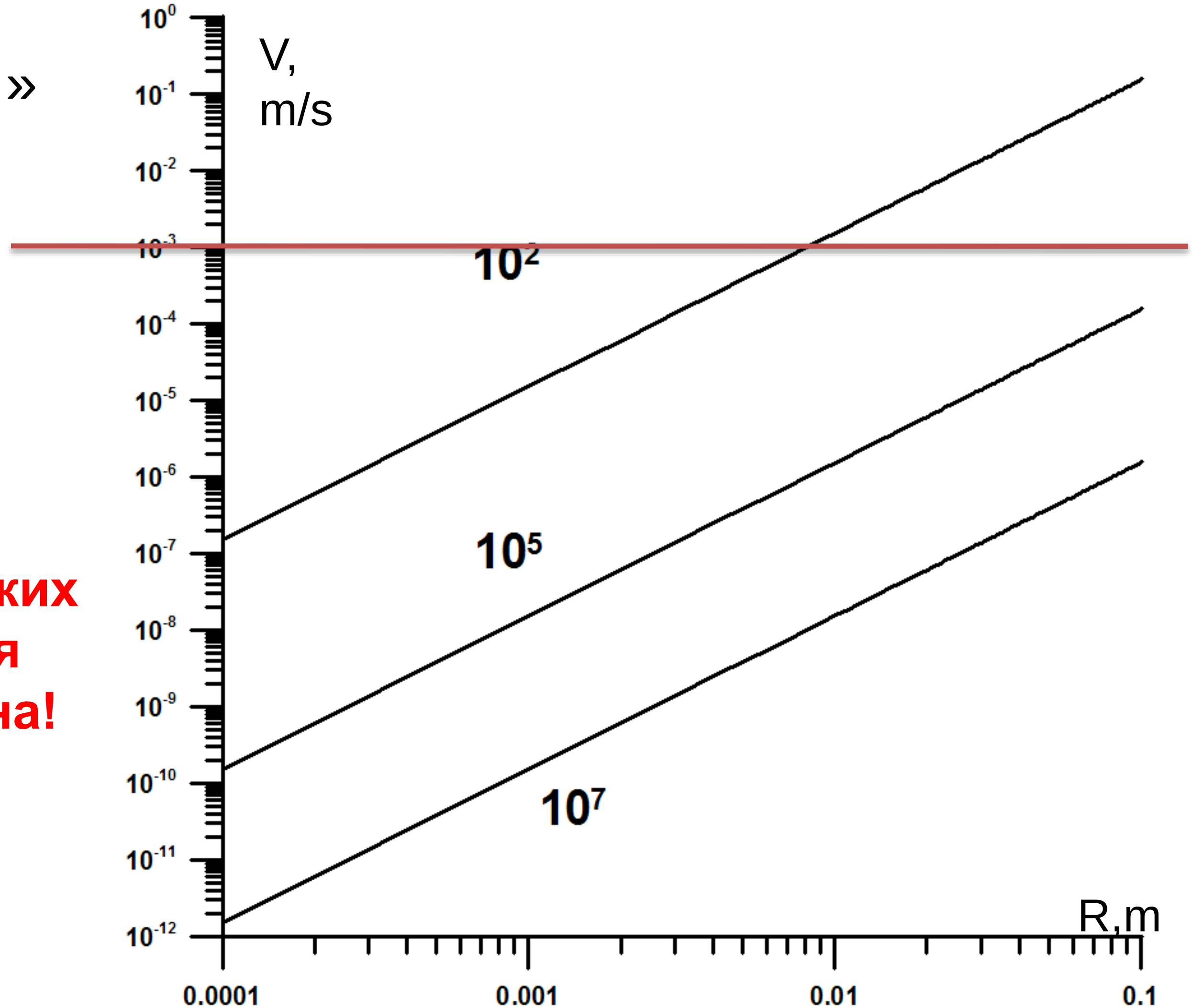


Скорость всплывания одиночного пузырька

$$F_A = (r_l - r_g) g = \frac{16}{\mathrm{Re}} \frac{r_l V^2}{R} = \frac{16 m_l}{R^2} V = F_m$$

$$r_l \ ? \ r_g \ ® \ V = \frac{r_l g R^2}{16 m} »$$

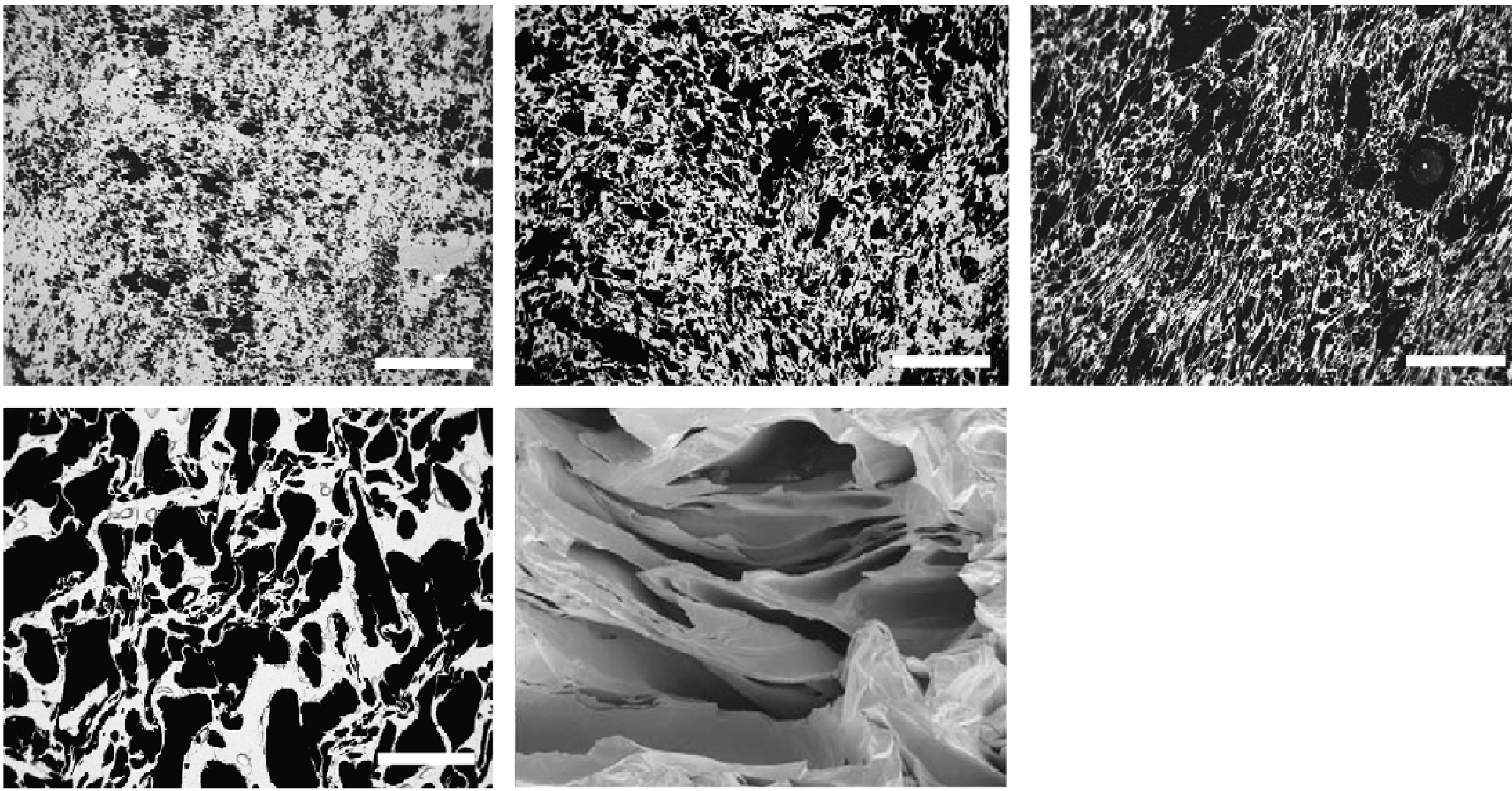
$$1530 \frac{R^2}{m}$$



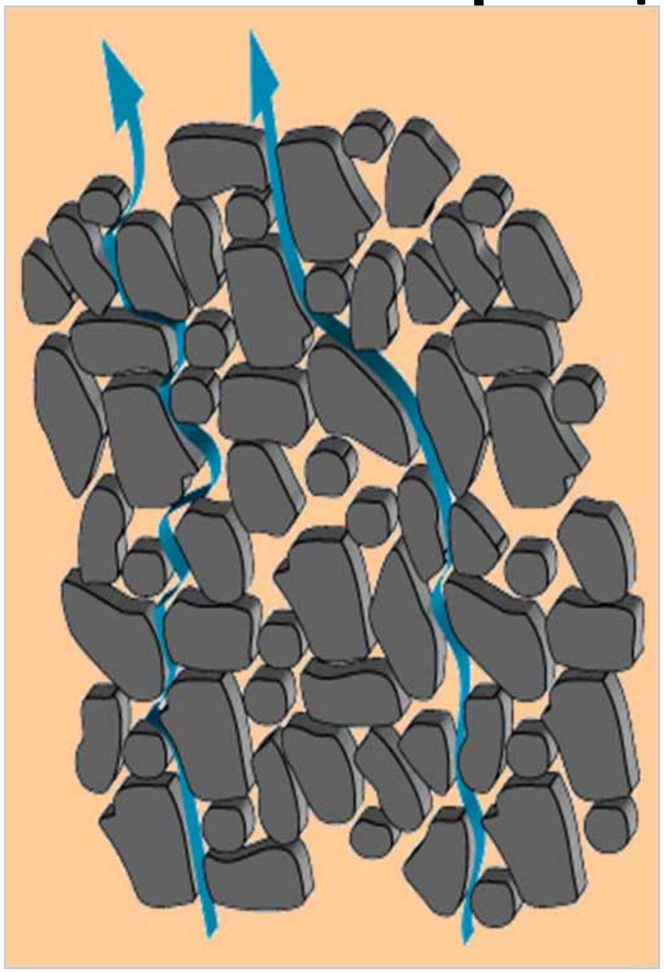
Дегазация высоковязких магм за счет всплытия пузырьков невозможна!

А как же лавовые купола?

Пузырьки в магме не сферические и не изолированные



Фильтрация газа. Закон Дарси



Проницаемая пористая среда, газ занимает объем a

$$\frac{\partial \rho_g^0 \alpha}{\partial t}+\frac{\partial \rho_g^0 \alpha V_g}{\partial x}=0;\ \alpha V_g=U_g$$

$$\cancel{\rho_g^0 \alpha\left(\frac{\partial V_g}{\partial t}+V_g\frac{\partial V_g}{\partial x}\right)=-\alpha\frac{\partial p}{\partial x}+F_{gs}}$$

$$F_{gs}=\alpha\frac{\mu_g}{k(\alpha)}U_g$$

Henry Darcy

<u>Закон Дарси</u>

$$\vec{U}_g=-\frac{k(\alpha)}{\mu_g}grad(P);$$

$$grad(P)=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x,\frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y,\frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

Аналог между течениями Дарси и Пуазейля

Представим пористую среду как набор параллельных труб, диаметра D. Тогда:

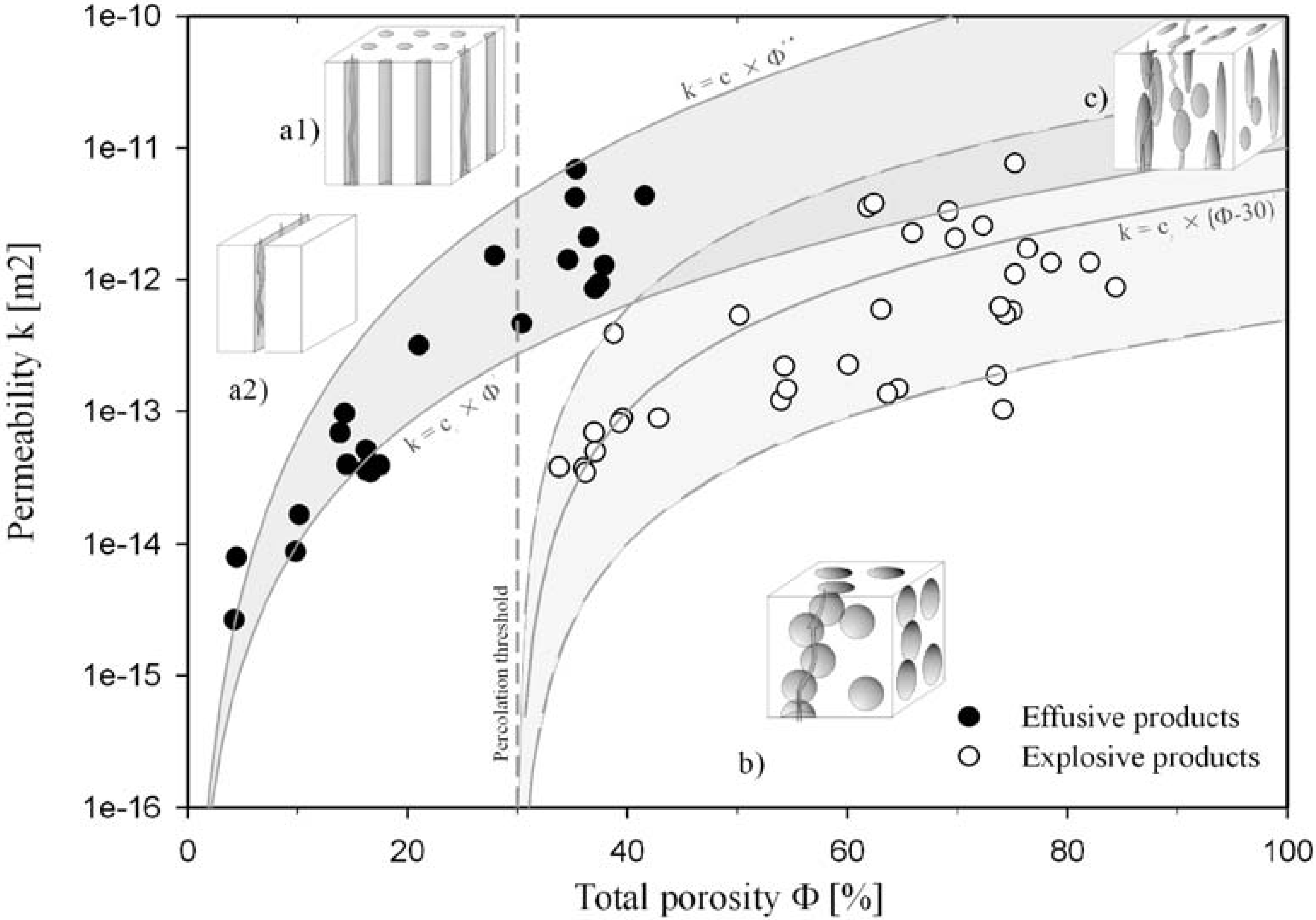
$$Q = nq = -n * \frac{\rho D^4}{128 m} \frac{dp}{dx} = -\frac{n \rho D^4}{4} \frac{k}{m} \frac{dp}{dx}$$

Скорость фильтрации.

$$U = \frac{Q}{A} = -\frac{n \rho D^2}{4A} \frac{k}{m} \frac{dp}{dx} = -a \frac{k}{m} \frac{dp}{dx}$$

$$k_D = \frac{D^2}{128 a}$$

Зависимость проницаемости от пористости



Оценки для скорости фильтрации газа.

$$\frac{dp}{dx} = -\rho(1-\alpha)g - 32\frac{\mu V}{D^2} =$$

$$= -2500*0.5*9.8 - 32\frac{10^7 10^{-3}}{30^2} = -12605\frac{\text{Pa}}{m}$$

Оценим скорость движения газа сквозь магму

$$\frac{V_g - V}{V} = -\frac{k(\alpha)}{\alpha\mu_g V}\frac{dp}{dx} = \frac{12605*10^{-12}}{0.5*10^{-5}10^{-3}} \approx 2.5$$

Газ движется в 2.5 раза быстрее магмы! Дегазация возможна

Итак:

- Мы нашли простое решение уравнений Навье-Стокса
- Научились оценивать расход магмы
- Выяснили куда летят вулканические бомбы
- Определили возможный механизм дегазации магмы при подъеме.