

- Ламинарные и турбулентные течения, число Рейнольдса
- Сила сопротивления канала вулкана.
- Моделирование течения многофазных сред. Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Система уравнений, описывающая многофазное, многоскоростное течение.
- Модели взаимодействия между фазами, обтекание твердой частицы.
- Летучие в магме. Растворимость, всплытие пузырей.
- Фильтрация газа. Закон Дарси. Дегазация магм

МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ

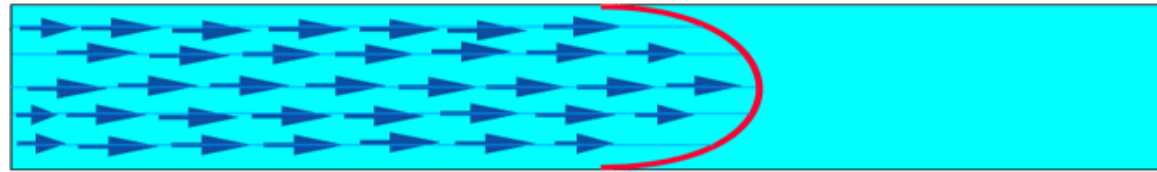
ТЕЛ 939-5476, EMAIL: MELNIK@IMES.MSU.RU

Ламинарные и турбулентные течения



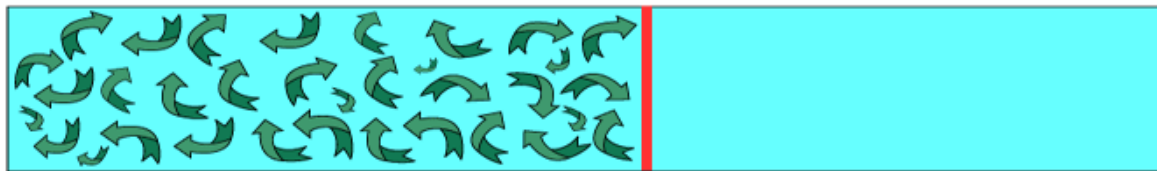
Osborne Reynolds
(1842 - 1912)

Laminar Flow 



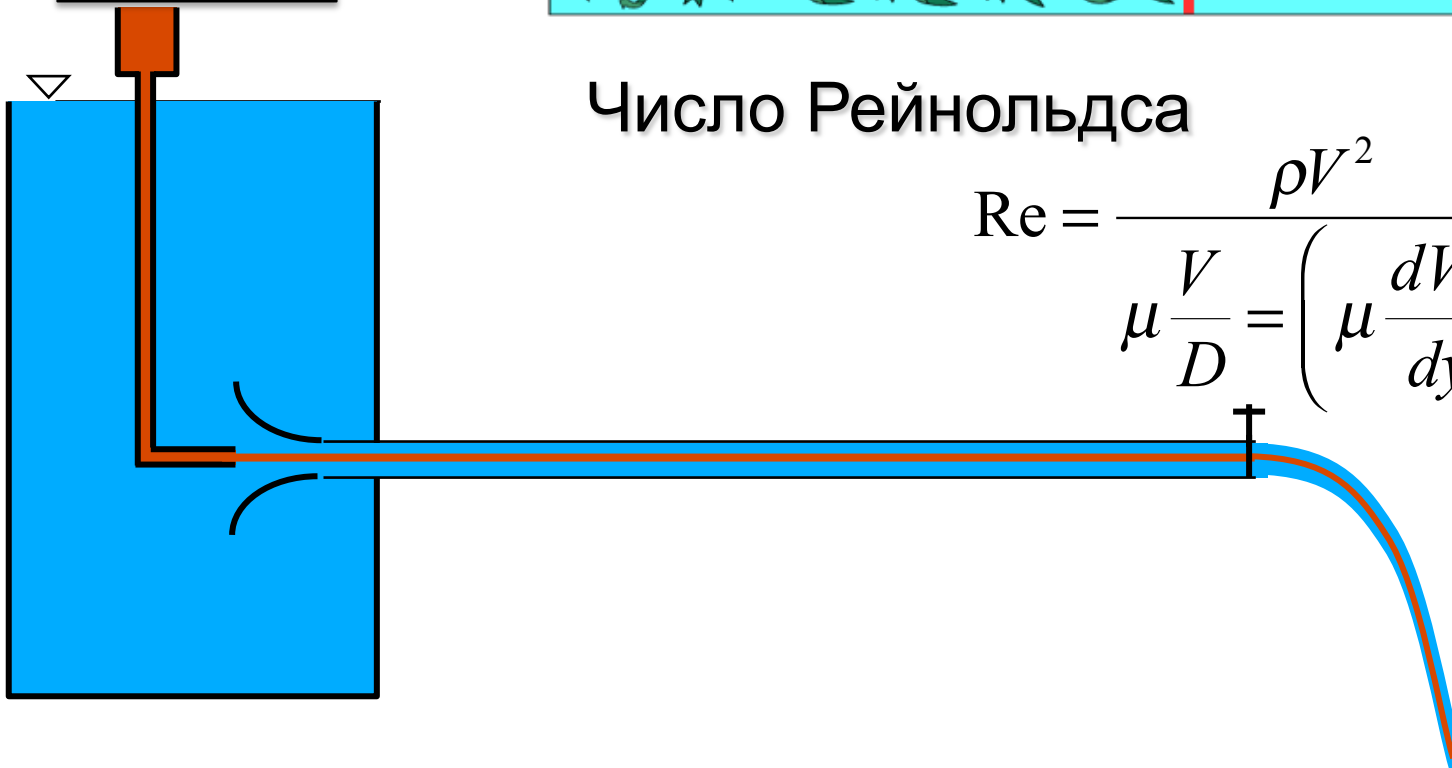
freshgasflow.com

Turbulent Flow 



Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho V^2}{\mu \frac{V}{D}} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{\rho V_x}{\mu \frac{dV_x}{dy}}$$



Что происходит
под вулканом?



Движение магмы в канале

Критическое число Рейнольдса ~ 2000

Канал – 50 м

Вязкость 10^5 Па с

Скорость 1 м/с

Плотность 2500 кг/м³

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{2500 * 1 * 50}{10^5} = 1.25$$

ДВИЖЕНИЕ ЛАМИНАРНО!

Для газозвеси

Канал – 50 м

Вязкость 10^{-5} Па с

Скорость 100 м/с

Плотность 10 кг/м³

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{10 * 100 * 50}{10^{-5}} = 5 \times 10^9$$

ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНО!

Сила и коэффициент сопротивления канала

- Перепишем уравнение в гидравлическом приближении

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{dp}{dx} = -\frac{32\mu V_{av}}{D^2} = -\lambda \frac{\rho V_{av}^2}{2D}$$

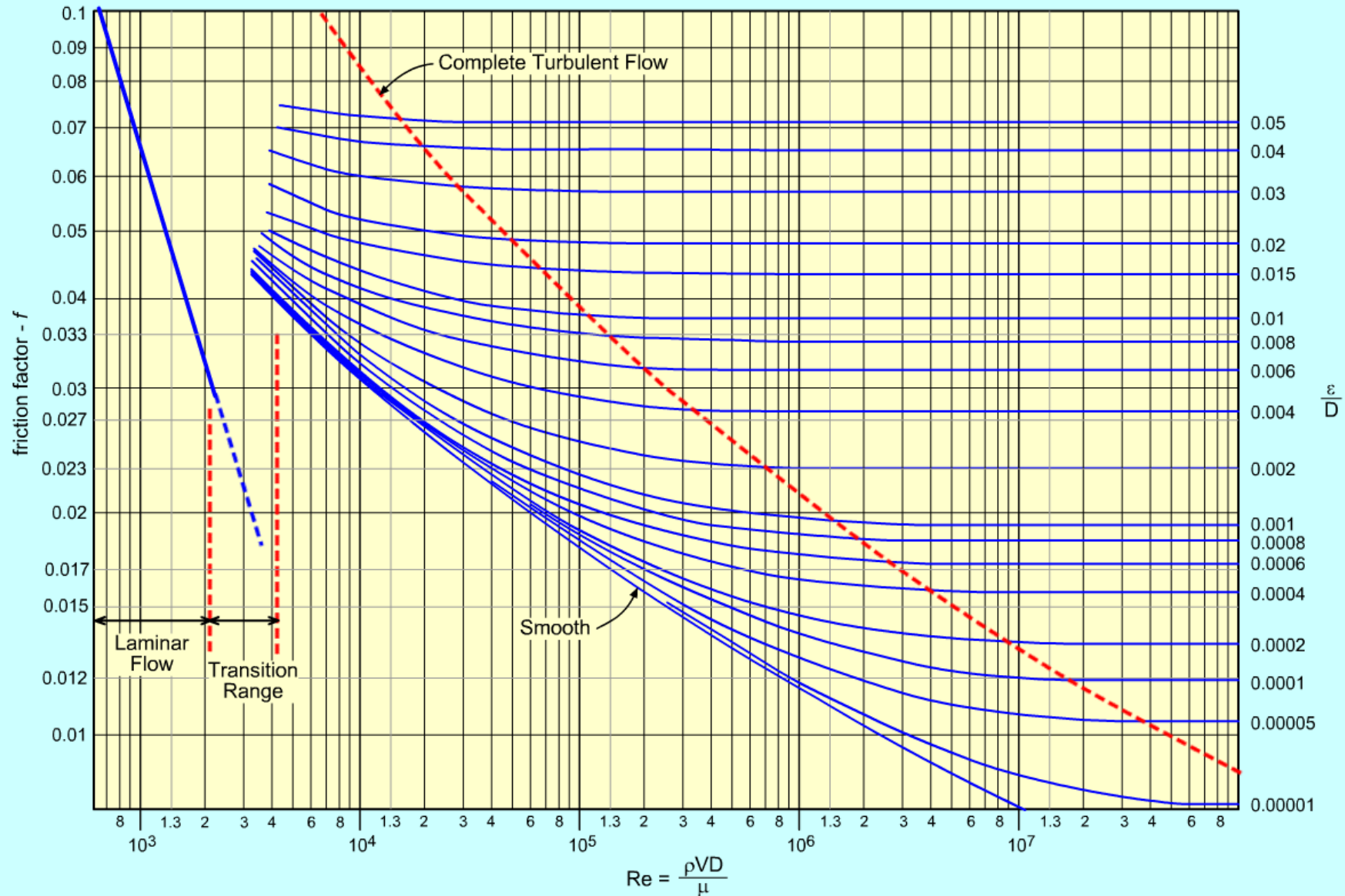
$$\text{Re} = \frac{\rho V_{av} D}{\mu}; \quad \lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

Для турбулентного режима:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{2.51}{\text{Re} \times \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{D} \times 0.269 \right]$$



Коэффициент сопротивления

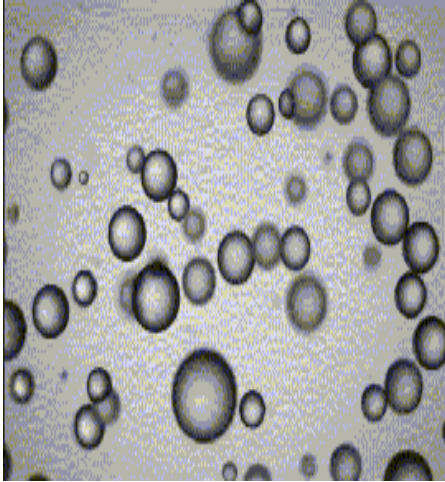


МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД.

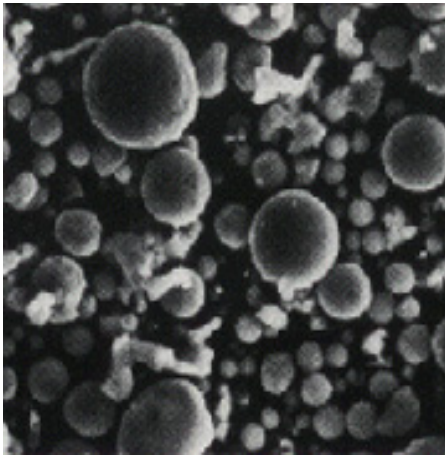
- Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Модели взаимодействия между фазами
- Обтекание пузырька и твердой частицы.

Описание дисперсных систем

пузырьки



частицы



Параметры многофазных сред

Приведенная плотность $= \frac{m_i}{\Omega_{mixture}} = \rho_i$

Истинная плотность $= \frac{m_i}{\Omega_i} = \rho_i^0$

Объемная доля $= \frac{\Omega_i}{\Omega_{mixture}} = \alpha_i$

Массовая доля $= \frac{m_i}{m_{mixture}} = X_i$

$$\Omega_{mixture} = \sum \Omega_i; \quad m_{mixture} = \sum m_i$$

Параметры смеси

$$\frac{\sum m_{ij} V_{ij}}{m_i} = V_i$$

Скорость отдельной фазы

$$\frac{\sum \rho_i V_i}{\rho_{mixture}} = V$$

Среднемассовая скорость смеси

$$\rho_{mixture} = \sum \rho_i$$

Уравнения неразрывности

Уравнения импульса

Поток массы

Силовое взаимодействие

Плотность двухфазной среды

$$\rho = (1 - \alpha) \rho_l^0 + \alpha \rho_g^0$$

Через объемную долю газа

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x_g}{\rho_g} + \frac{1 - x_g}{\rho_l}$$

Через массовую долю газа

Структура уравнений для двухфазной смеси (1D)

$$\frac{\partial \rho_g^0 \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 \alpha V_g}{\partial x} = J_{lg}; \quad \frac{\partial \rho_l^0 (1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l^0 (1-\alpha) V_l}{\partial x} = -J_{lg};$$

$$\rho_g^0 \alpha \left(\frac{\partial V_g}{\partial t} + V_g \frac{\partial V_g}{\partial x} \right) = -\alpha \frac{\partial p_g}{\partial x} - F_{gl} + g_g + \dots$$

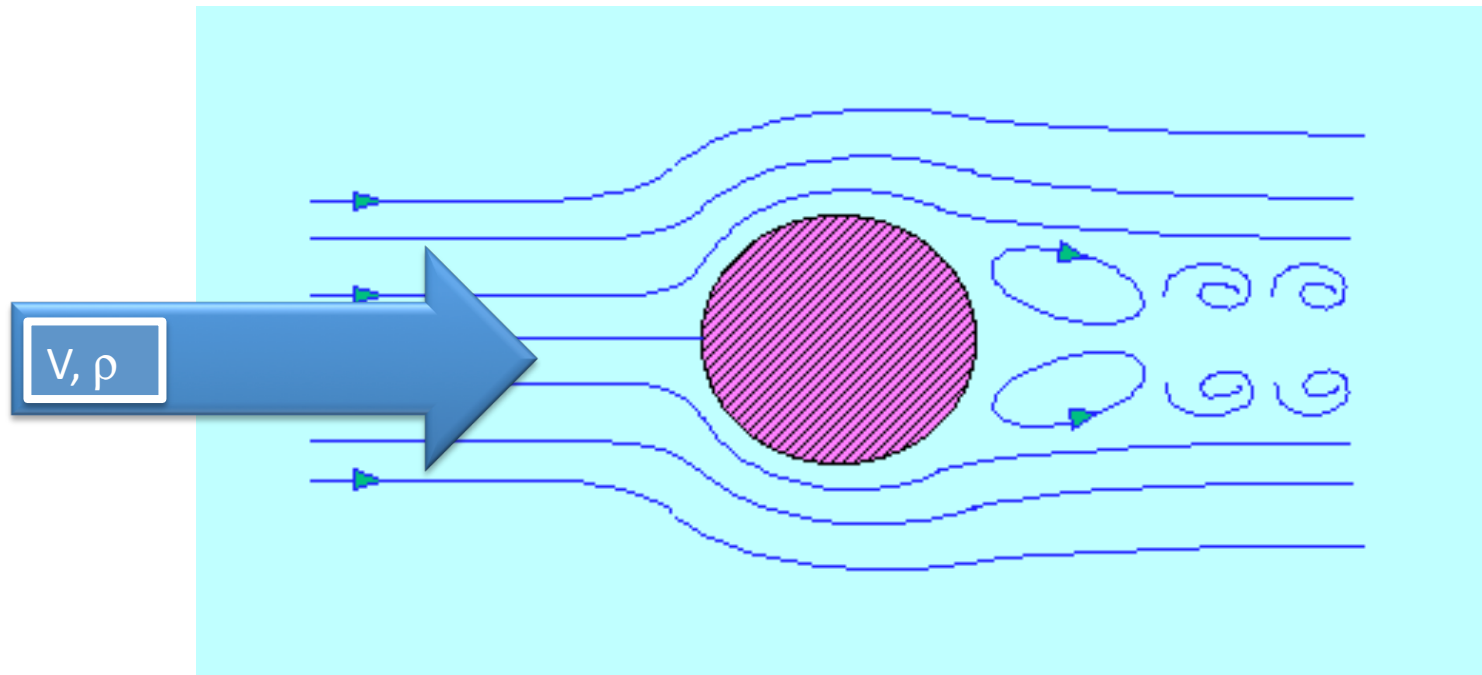
$$\rho_l^0 (1-\alpha) \left(\frac{\partial V_l}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_l}{\partial x} \right) = -(1-\alpha) \frac{\partial p_l}{\partial x} + F_{gl} + g_l + \dots$$

$$\rho_l^0 = const; \quad \rho_g^0 = \frac{p_g}{R_g T}$$

За счет разности скоростей фаз происходит обтекание частиц или пузырьков, порождающее силы

СИЛЫ МЕЖФАЗНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Обтекание сферической частицы



Сила и коэффициент сопротивления

Полная сила, действующая на F_d частицу

$$F_d = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

Коэффициент сопротивления

Площадь миделева сечения = $\pi d_p^2/4$

$$Re_p = \frac{d_p V \rho}{\mu}$$

(1) $Re_p < 2$, ламинарное (**Закон Стокса**)

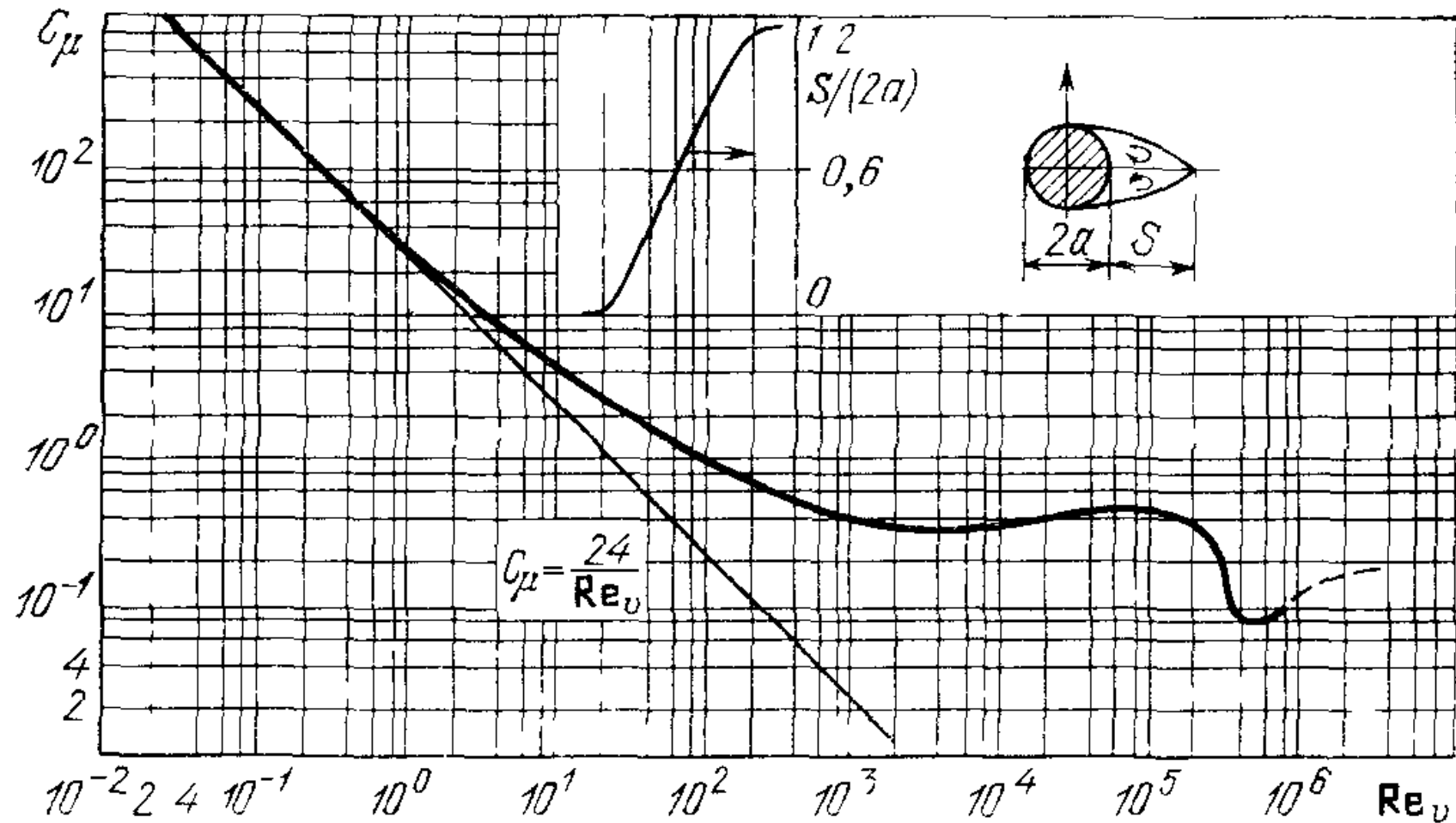
$$C_D = \frac{24}{Re_p}$$

(2) $2 < Re_p < 500$, переходное (**Закон Аллена**)

$$C_D = \frac{18.5}{Re_p^{0.6}}$$

(3) $500 < Re_p < 2 \times 10^5$, турбулентное (**закон Ньютона**) $C_D \approx 0.44$

Коэффициент сопротивления в зависимости от Re



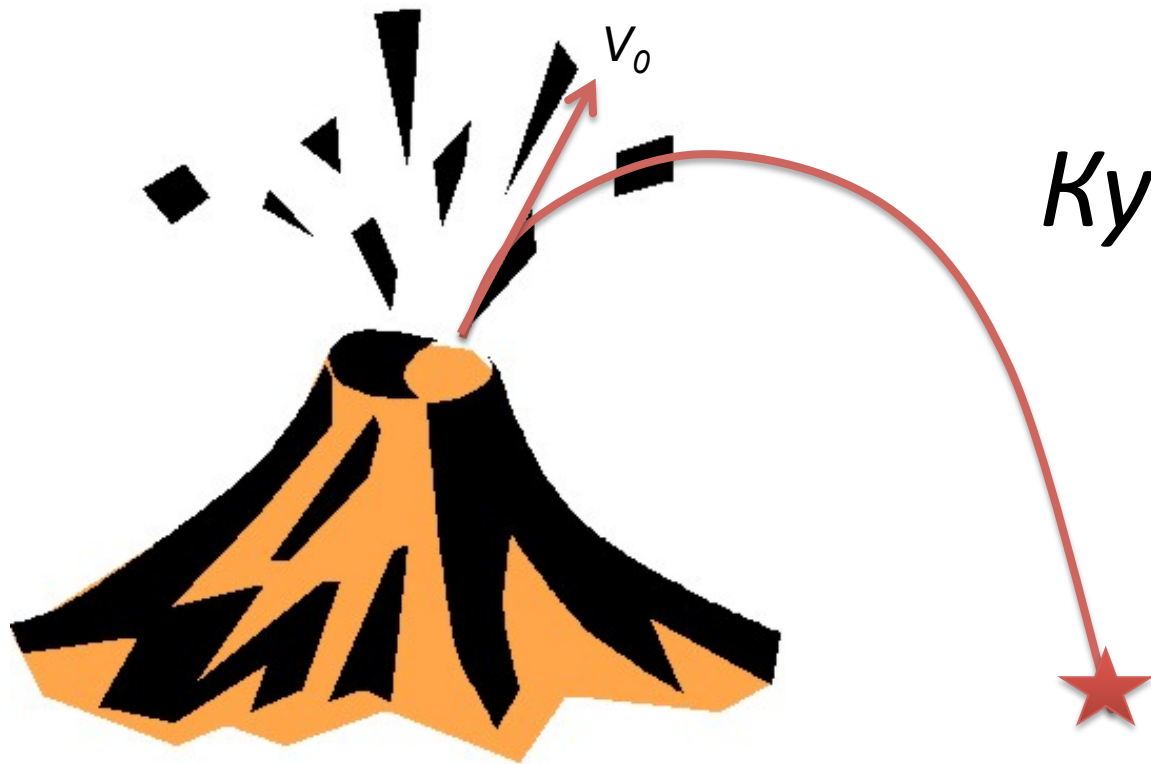
В случае трехмерного поля скоростей газа и движения частицы выражение для силы:

$$\vec{F}_d = C_D A_p \frac{\rho_g |\vec{V}_g - \vec{V}_p| (\vec{V}_p - \vec{V}_g)}{2}$$

Полет вулканической бомбы



Итак вулкан изверг бомбу со
скоростью V_0 , под углом α ,
радиуса R



Вопрос!
Куда бежать?

Запишем уравнения движения бомбы.

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \Sigma F \quad \text{2-й закон Ньютона.}$$

Или в проекции на оси координат

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_{d,x} = C_D A_p \frac{\rho_g |\vec{V}|}{2} V_x; \quad C_D \sim 0.5, \quad A_p = \pi R^2$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - F_{d,y} = -mg - C_D A_p \frac{\rho_g |\vec{V}|}{2} V_y; \quad m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}$$

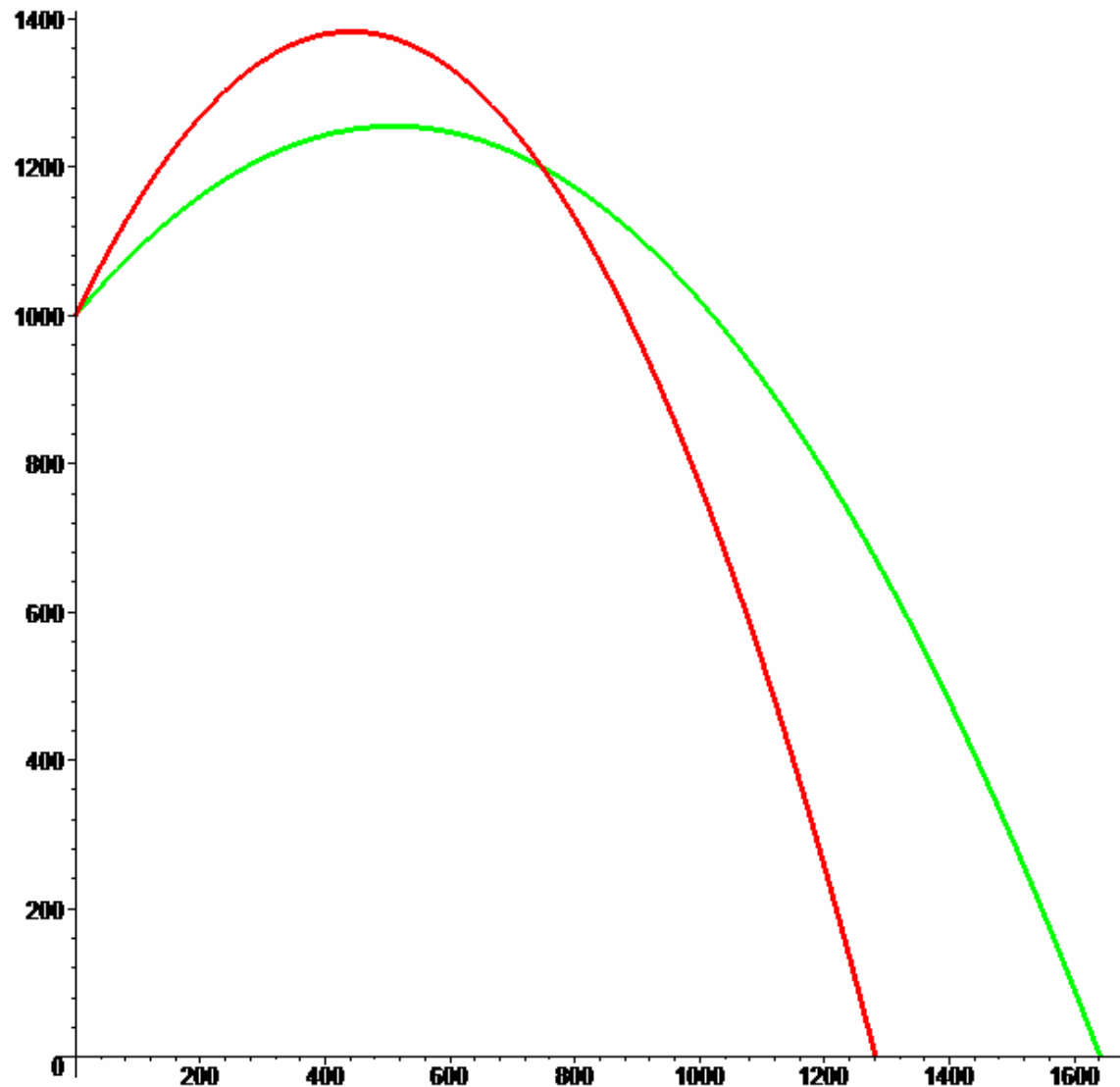
Траектория бомбы

Начальная скорость 100 м/с
Начальный угол 45 и 60°
Коэффициент сопротивления равен 0

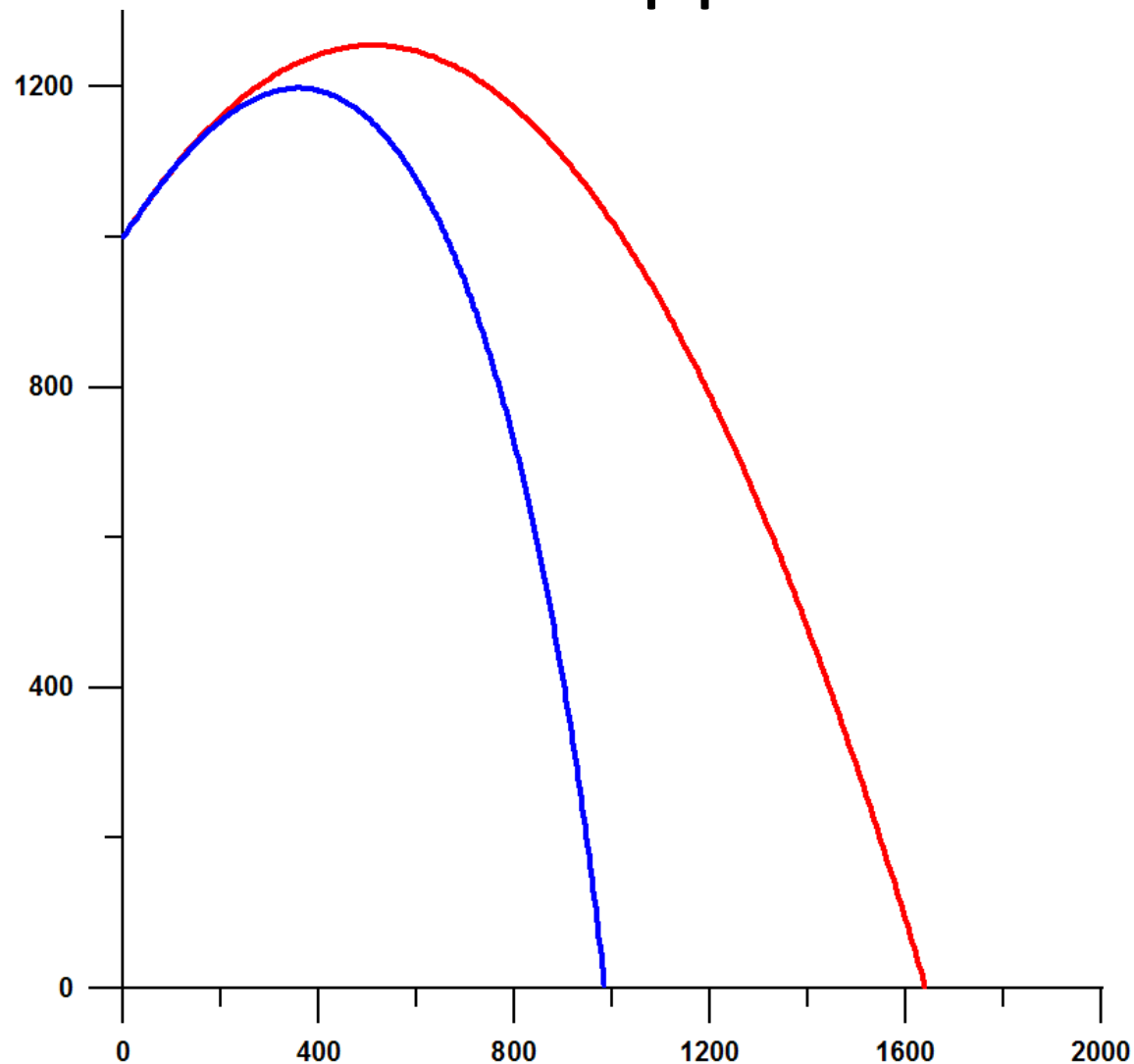
Бомба летит по параболе.

Времена падения 23 и 25 сек

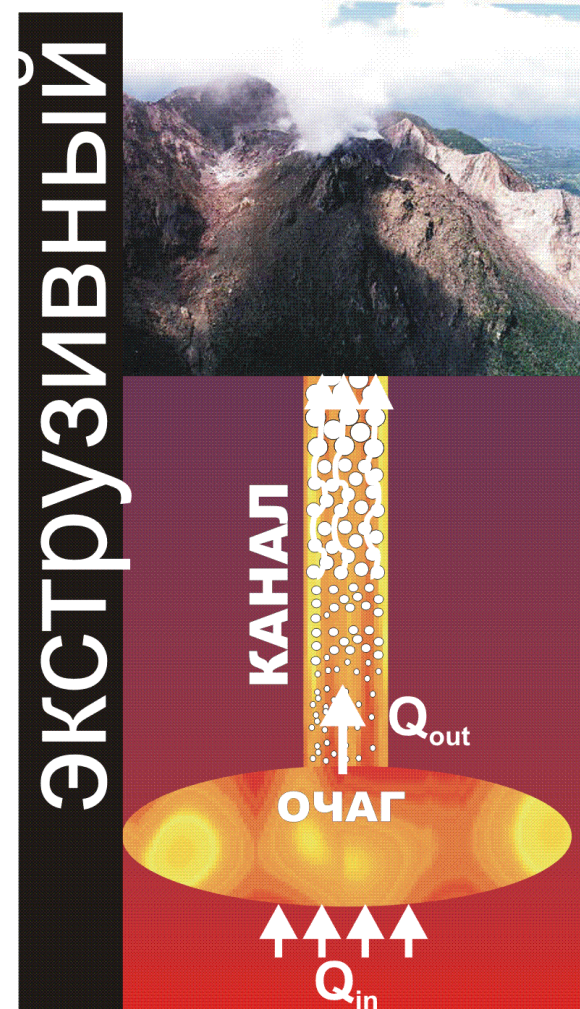
ВЫВОД! Бежать бесполезно



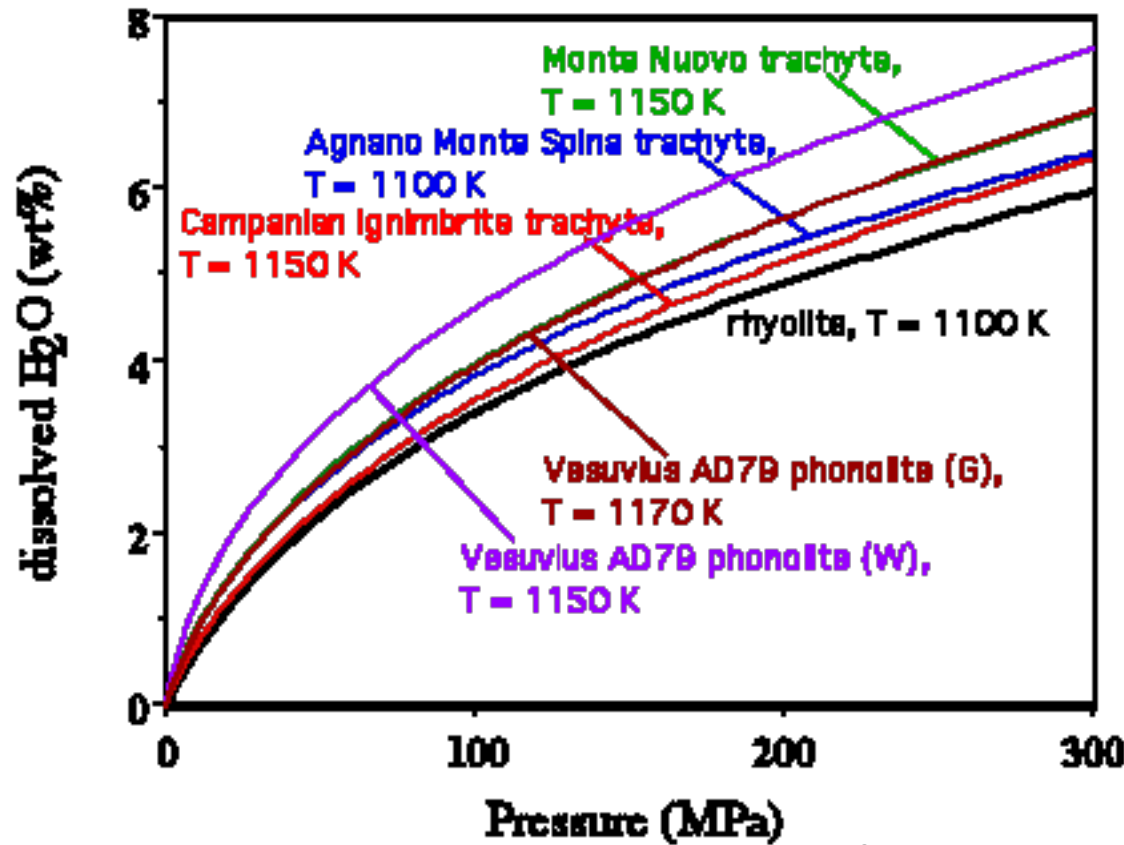
С учетом сопротивления бомба
полетит не так далеко!



Летучие в магме



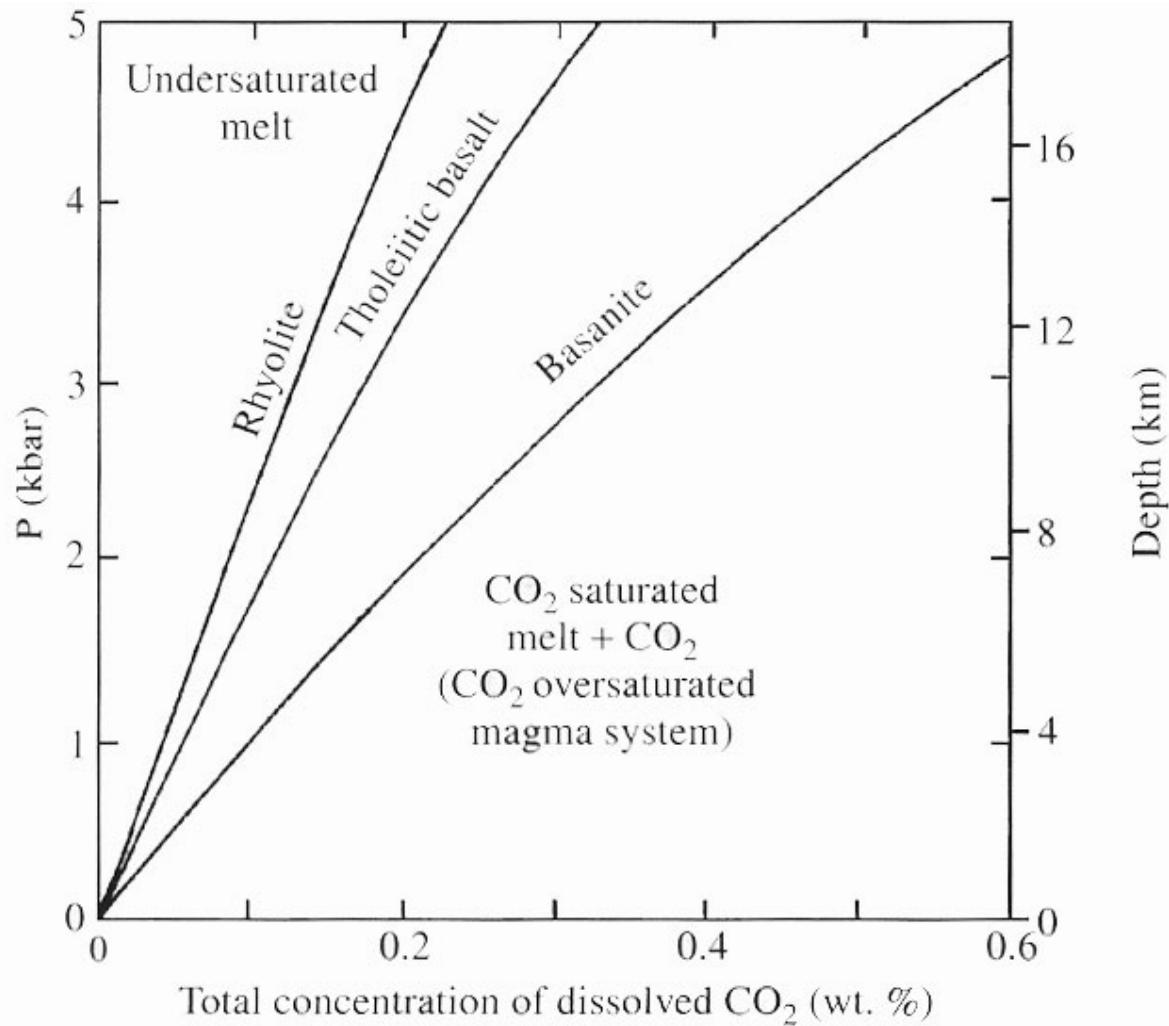
Растворимость воды в силикатных расплавах



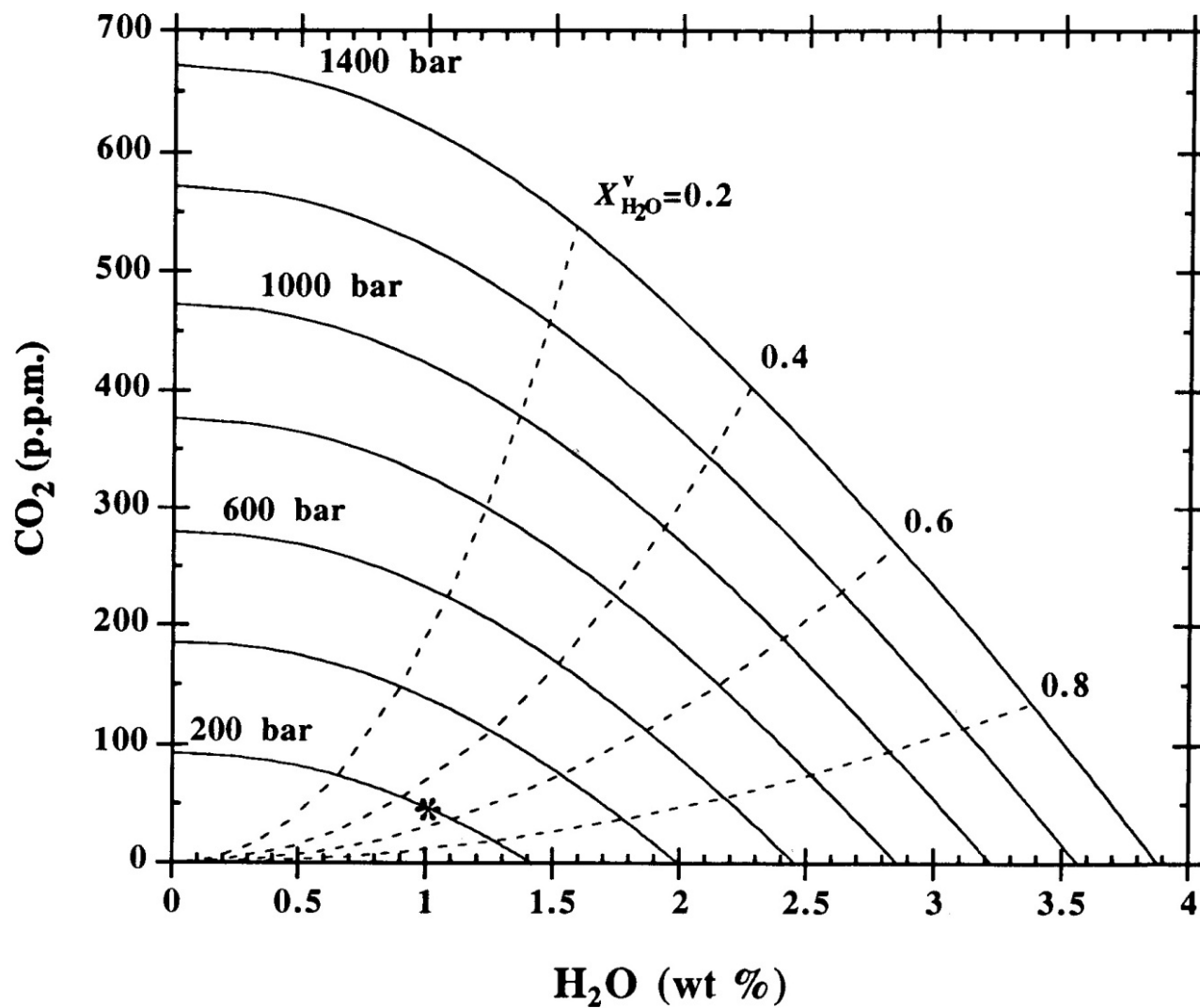
After Papale, 1997

- :
- $X=Cp^n$
- $n\sim 0.5$,
C (состав)

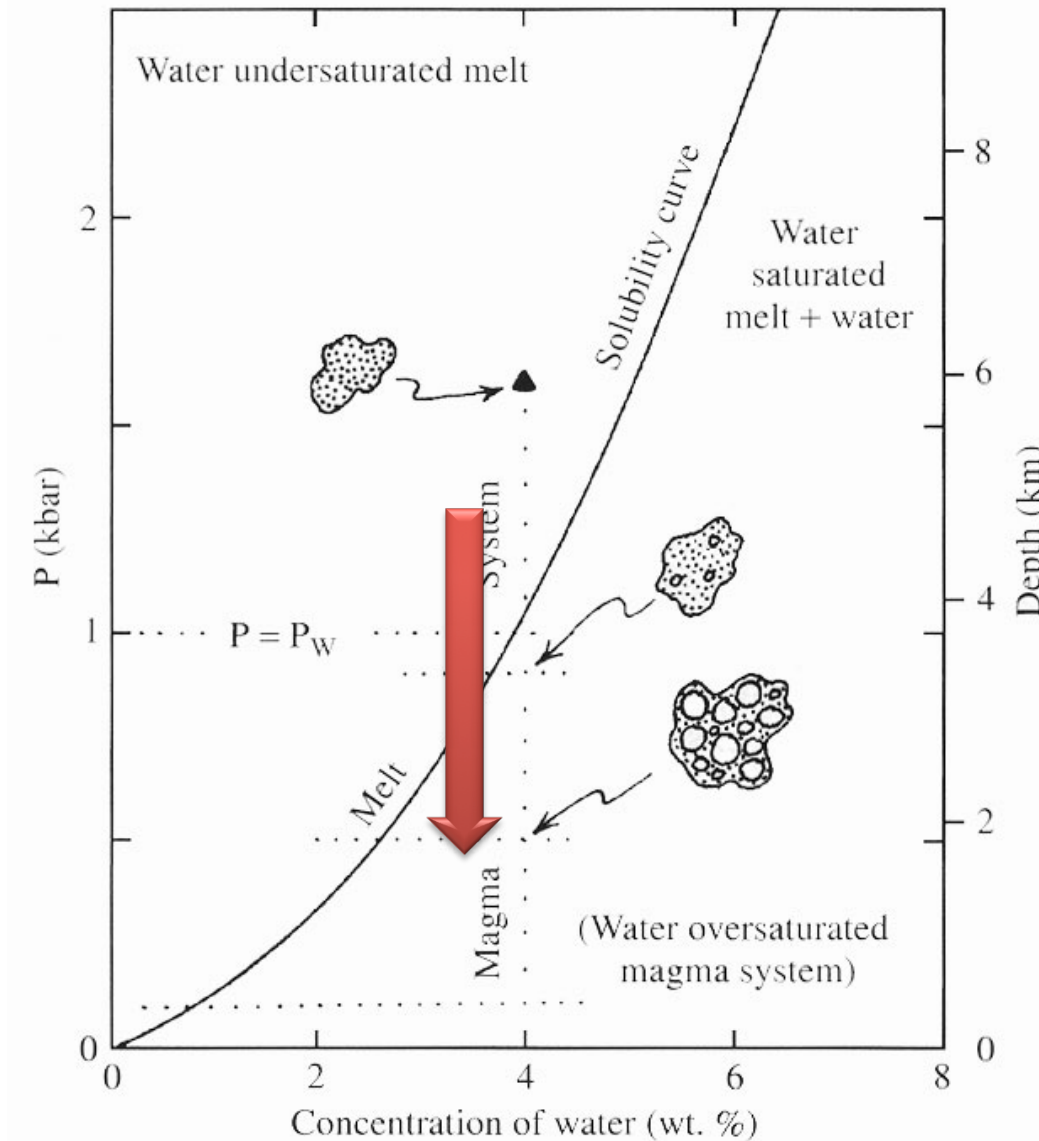
Растворимость CO₂



Система $\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$

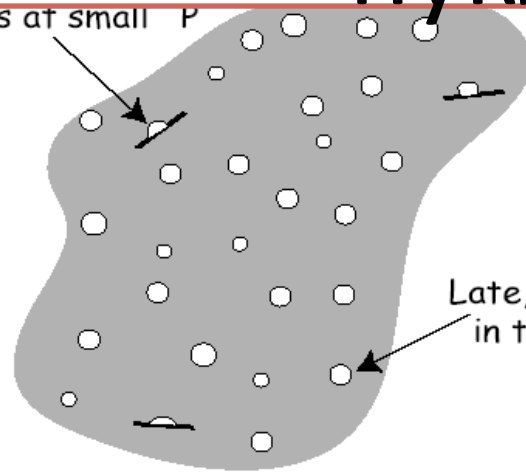


Нуклеация пузырьков



Гомогенная и гетерогенная нуклеация

on crystals at small P



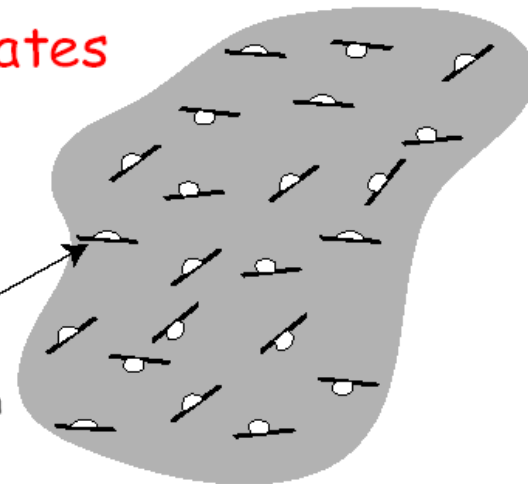
Crystallinity (cryptic sites)
 $< 10^4 / \text{cm}^3$

Late, homogeneous nucleation
in the bulk melt at large P

Heterogeneous Mechanism Dominates

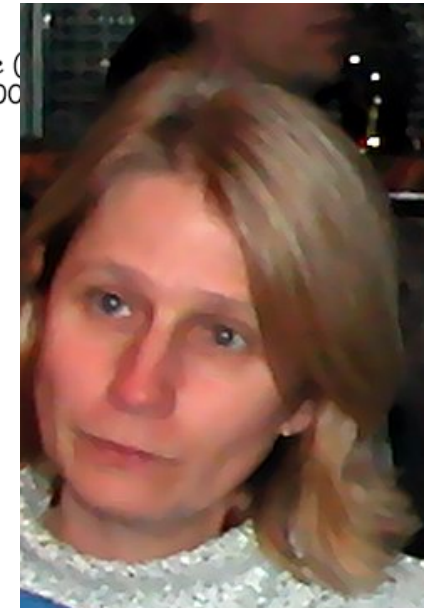
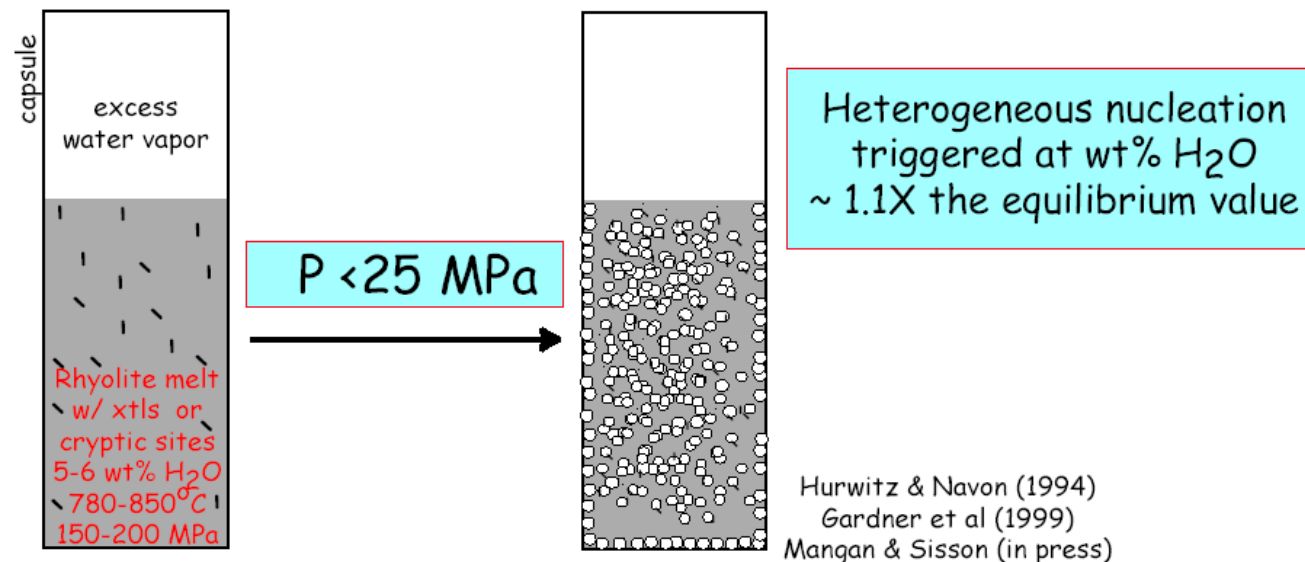
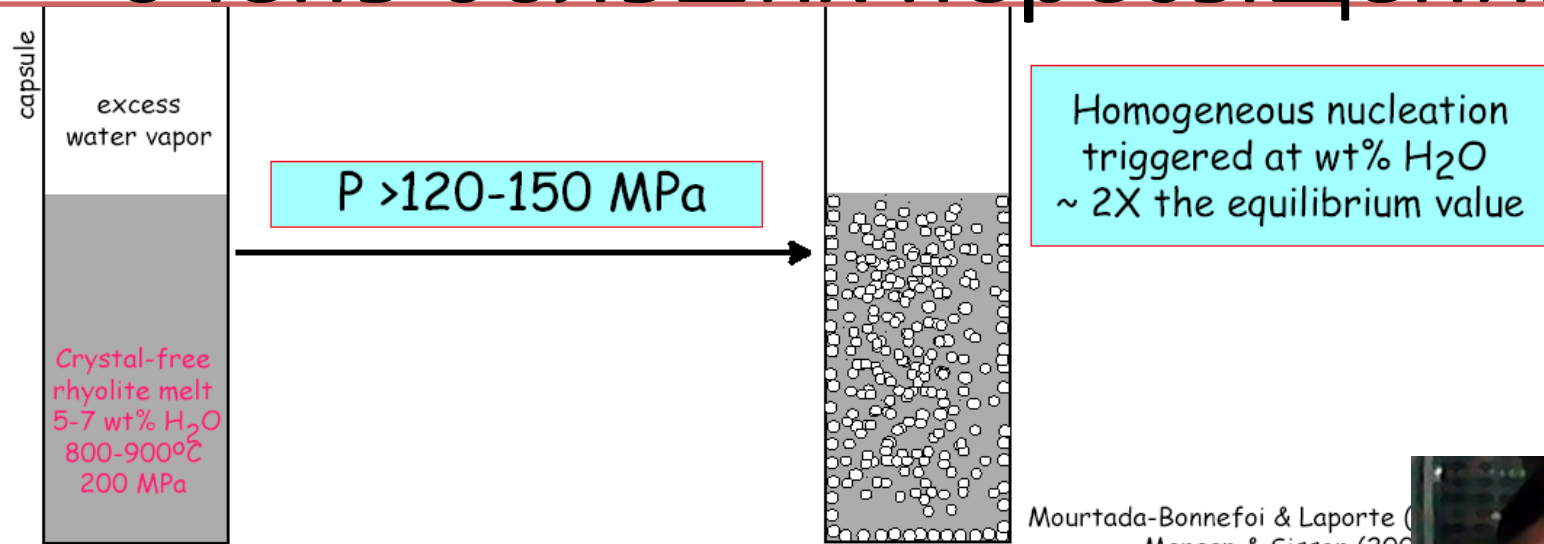
Crystallinity (cryptic sites)
 $> 10^6 / \text{cm}^3$

Early,
heterogeneous nucleation
on crystals at small P ,
no homogeneous nucleation



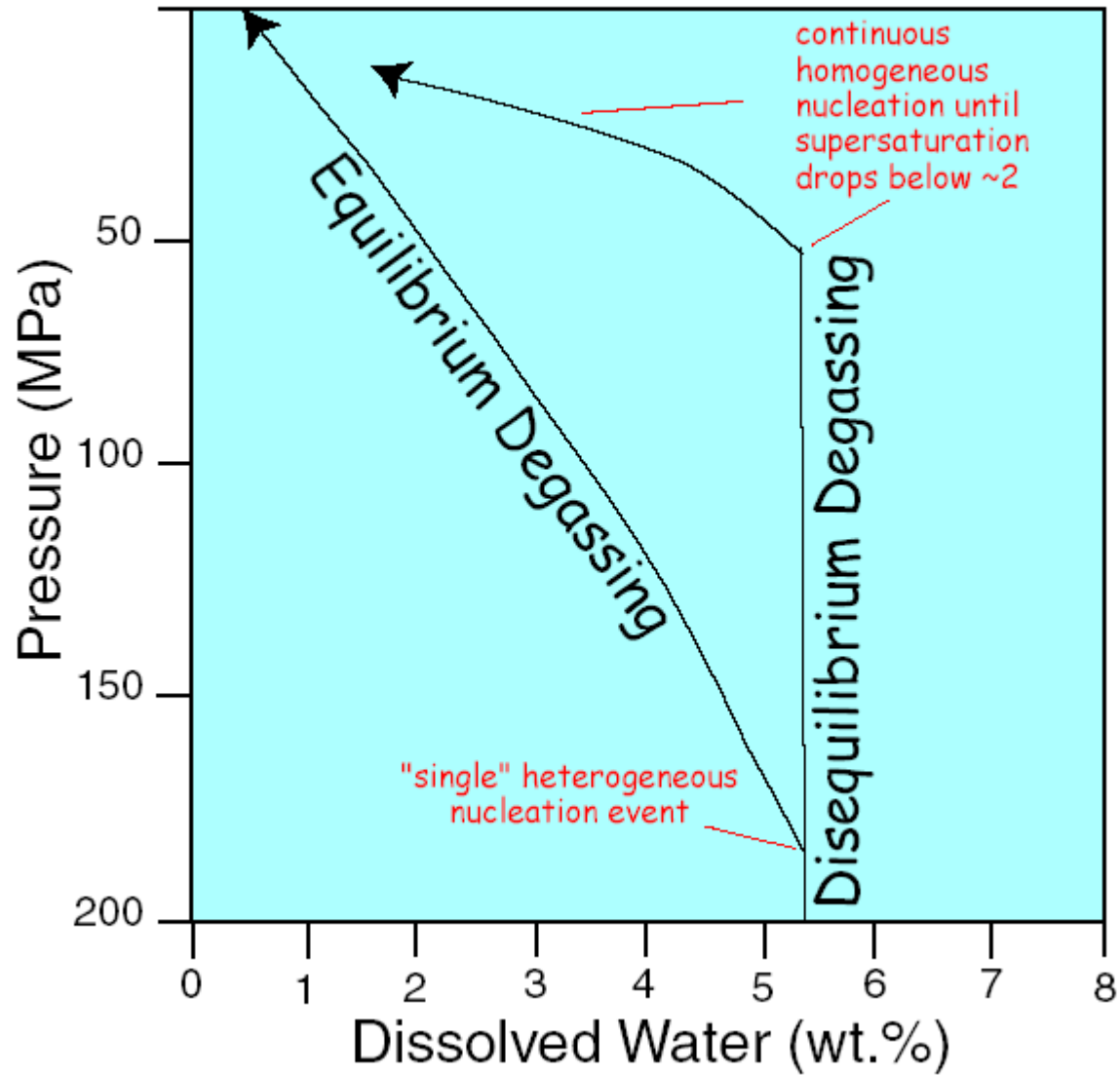
Data of Gardner et al (1999);
Mangan & Sisson (2000; in press)

Гомогенная нуклеация требует очень больших пересыщений



Margaret Mangan

Девазация магмы



Если газ поднимается вместе с магмой.

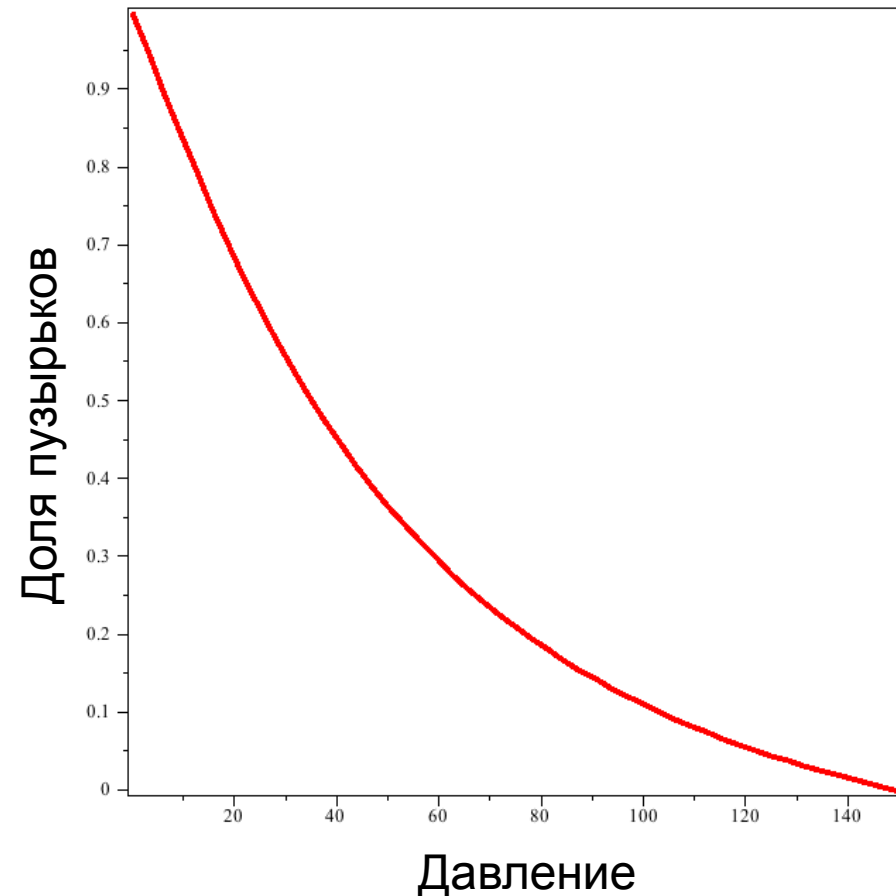
Запишем законы сохранения массы
для газа и магмы
(стационарное движение)

$$\left(\rho_g^0 \alpha + \rho_m^0 (1 - \alpha) x\right) V = q_g$$

$$\left(\rho_m^0 (1 - \alpha) (1 - x)\right) V = q_m$$

$$x = C \sqrt{p}; \rho_g^0 = \frac{p}{RT}; \rho_m^0 = const$$

Если бы газ не двигался
относительно магмы, то при
атмосферном давлении она
состояла бы на 99% из
пузырьков!

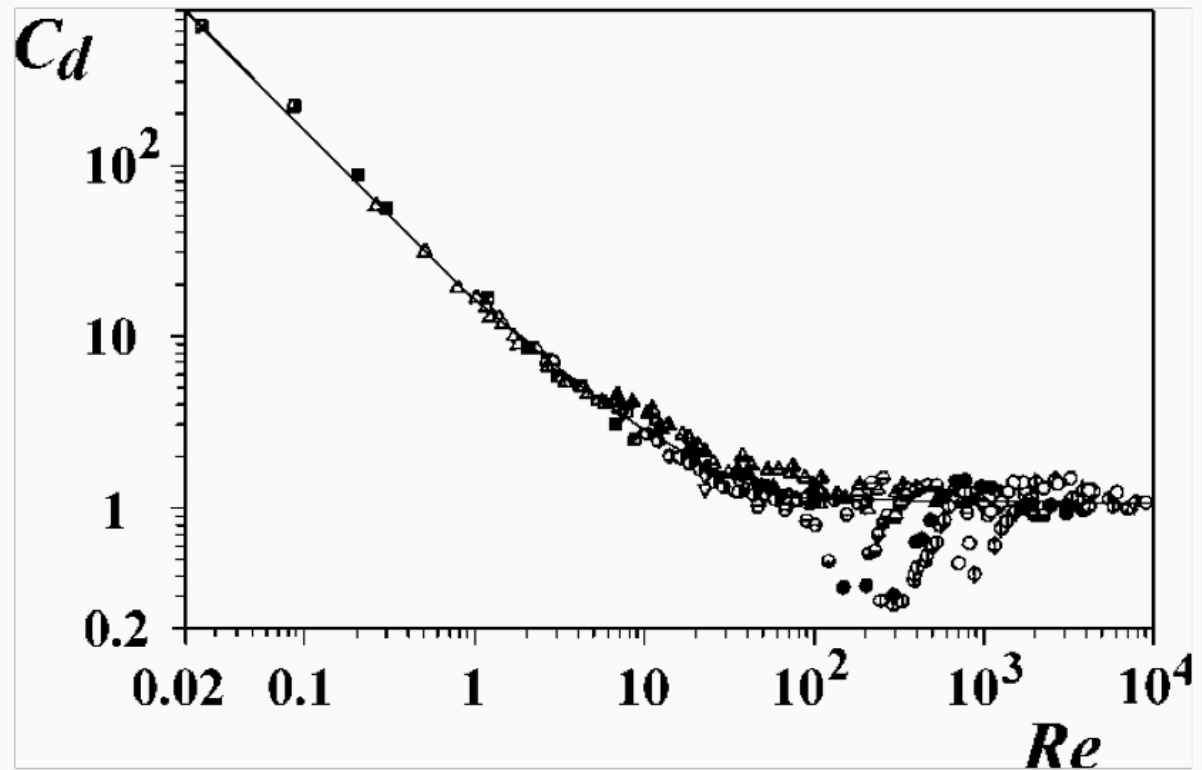


Скорость всплывания одиночного пузырька

$$Re_v = \frac{R\rho_l V}{\mu}$$

При малых числах
Рейнольдса

$$C_\mu = 16/Re_v, \quad Re_v \ll 1$$



Скорость всплывания одиночного пузырька

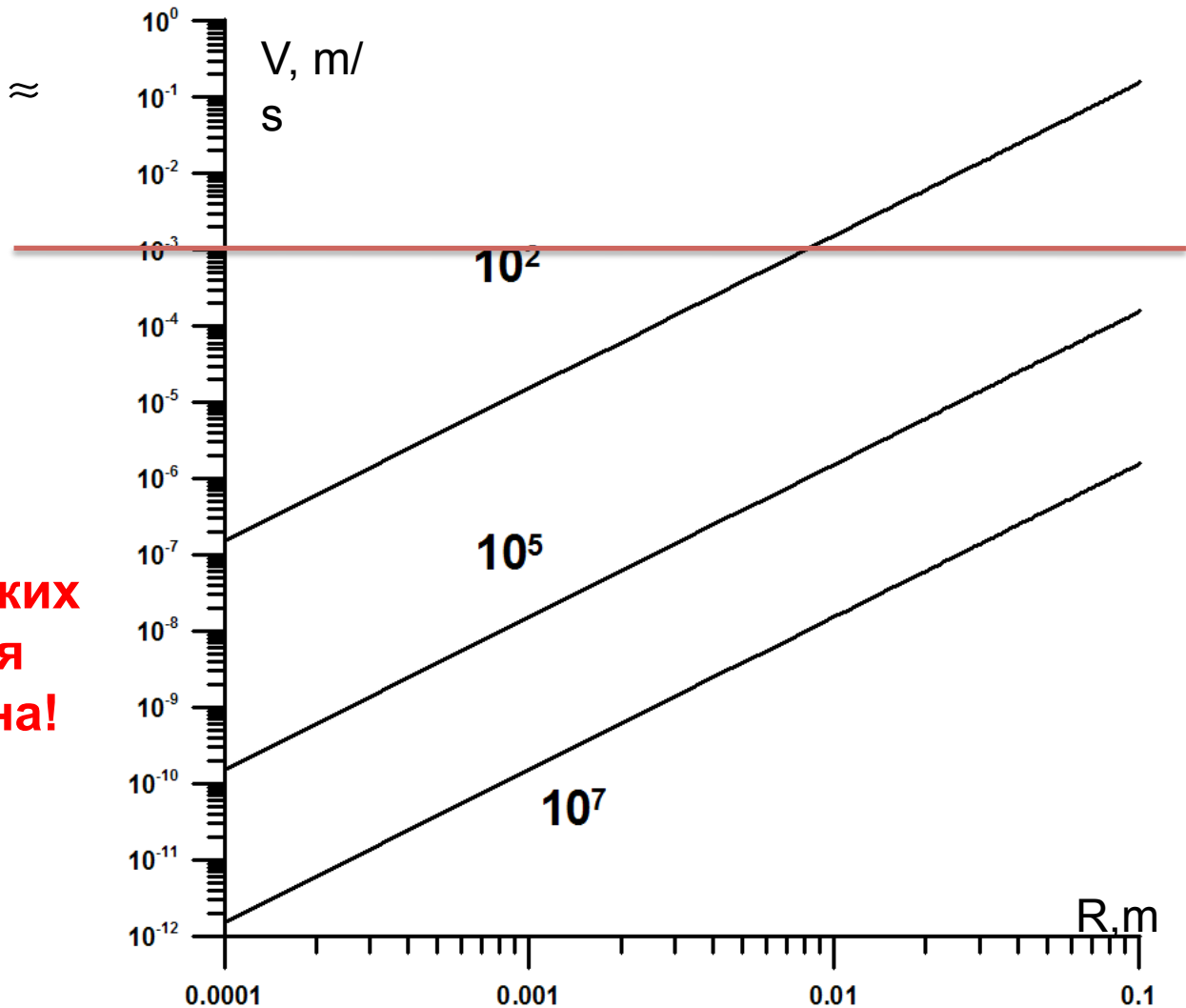
$$F_A = (\rho_l - \rho_g)g = \frac{16 \rho_l V^2}{\text{Re} R} = \frac{16 \mu_l}{R^2} V = F_\mu$$

$$\rho_l \gg \rho_g \rightarrow V = \frac{\rho_l g R^2}{16 \mu} \approx$$

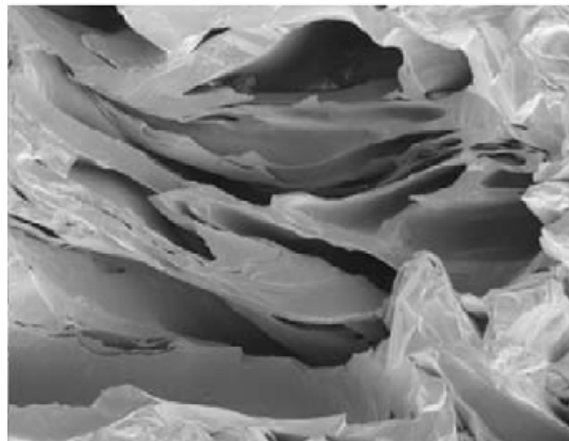
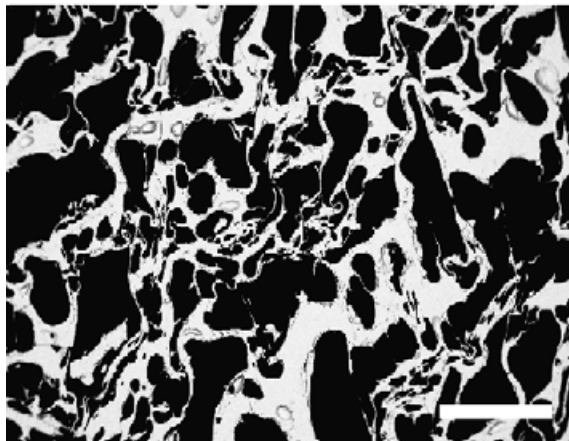
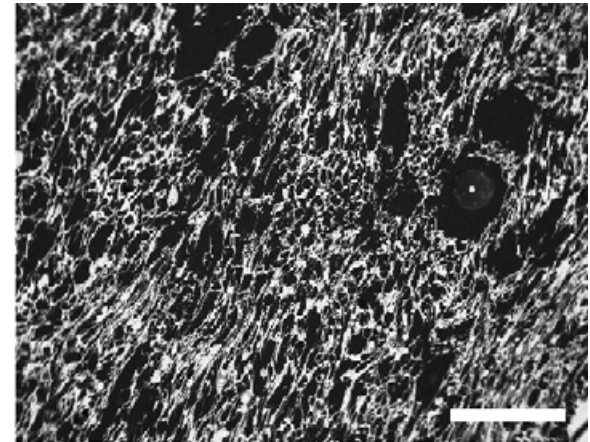
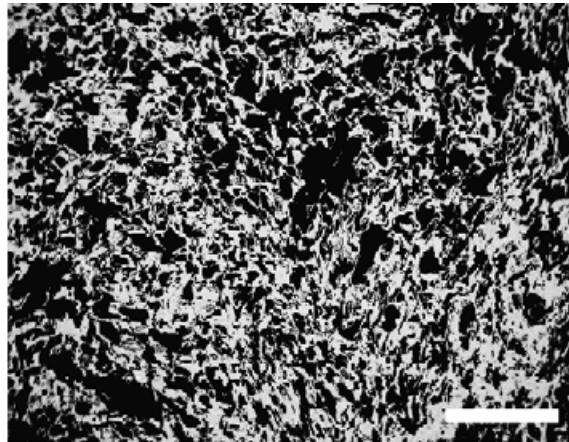
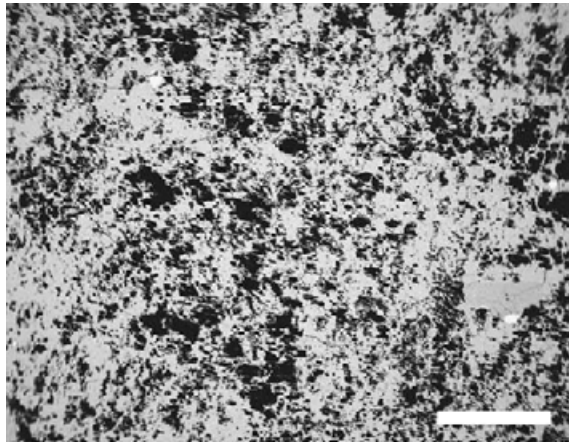
$$1530 \frac{R^2}{\mu}$$

Дегазация высоковязких магм за счет всплытия пузырьков невозможна!

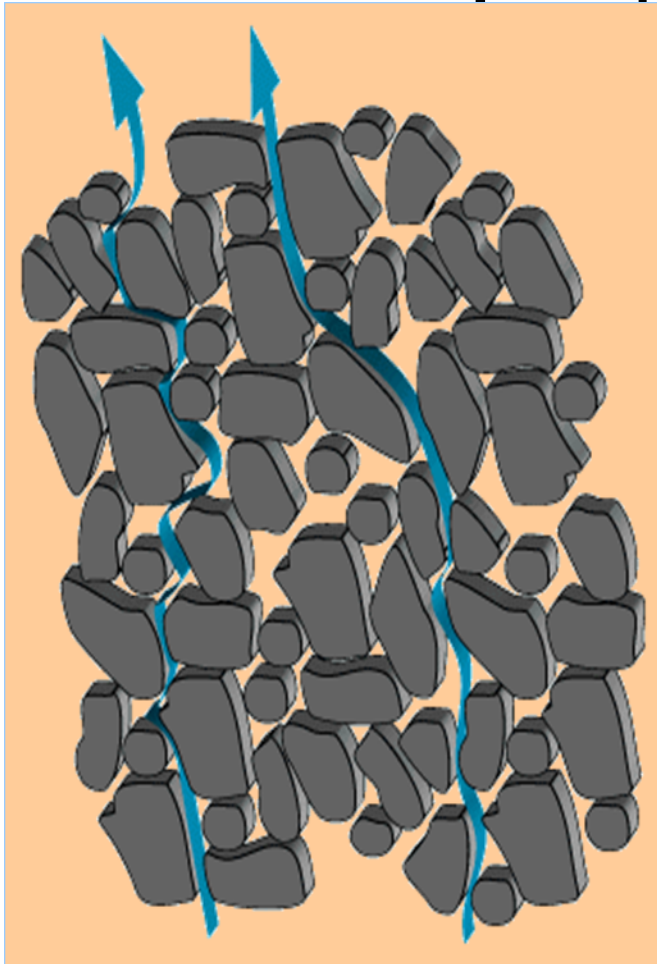
А как же лавовые купола?



Пузырьки в магме не сферические и не изолированные



Фильтрация газа. Закон Дарси



Проницаемая пористая среда, газ занимает объем α

$$\frac{\partial \rho_g^0 \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 \alpha V_g}{\partial x} = 0; \quad \alpha V_g = U_g$$

~~$$\rho_g^0 \alpha \left(\frac{\partial V_g}{\partial t} + V_g \frac{\partial V_g}{\partial x} \right) = -\alpha \frac{\partial p}{\partial x} + F_{gs}$$~~

$$F_{gs} = \alpha \frac{\mu_g}{k(\alpha)} U_g$$

Закон Дарси

$$\vec{U}_g = -\frac{k(\alpha)}{\mu_g} \text{grad}(P);$$

$$\text{grad}(P) = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x, \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y, \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$



Henry Darcy

Аналог между течениями Дарси и Пуазейля



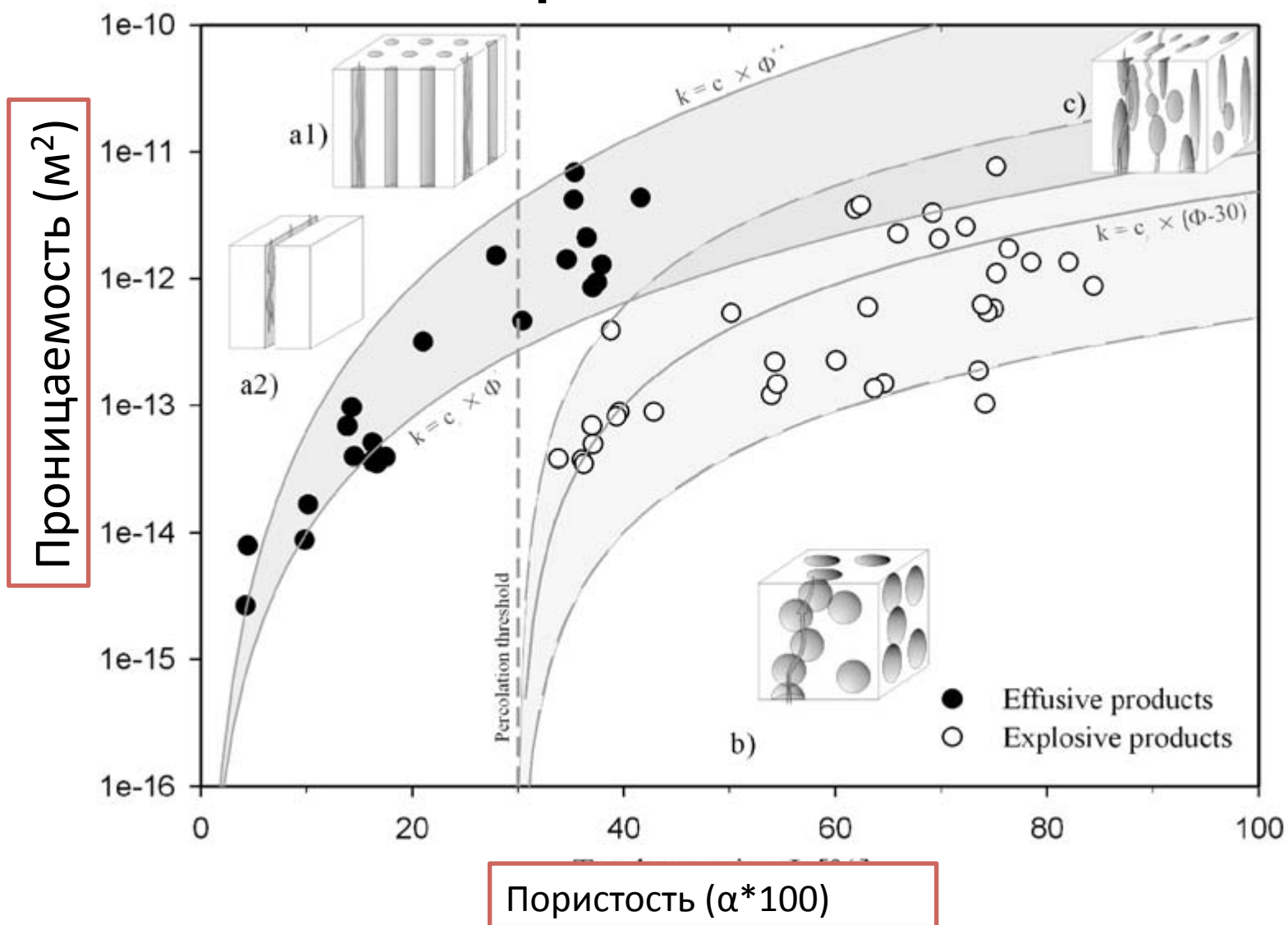
Представим пористую среду как набор параллельных труб, диаметра D . Тогда:

$$U = \alpha V = -\alpha \frac{D^2}{32\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

Отсюда следует

$$k = \alpha \frac{D^2}{32}$$

Зависимость проницаемости от пористости



Оценки для скорости фильтрации газа.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= -\rho (1 - \alpha)g - 32 \frac{\mu V}{D^2} = \\ &= -2500 * 0.5 * 9.8 - 32 \frac{10^7 10^{-3}}{30^2} = -12605 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}\end{aligned}$$

Оценим скорость движения газа сквозь магму

$$\frac{V_g - V}{V} = -\frac{k(\alpha) dp}{\alpha \mu_g V dx} = \frac{12605 * 10^{-12}}{0.5 * 10^{-5} 10^{-3}} \approx 2.5$$

Газ движется в 2.5 раза быстрее магмы! Дегазация возможна

Итак:

- Узнали от чего зависит режим течения жидкости
- Познакомились с методами описания многофазных сред.
- Выяснили куда летят вулканические бомбы
- Определили возможный механизм дегазации магмы при подъеме.