

- Ламинарные и турбулентные течения, число Рейнольдса
- Сила сопротивления канала вулкана.
- Летучие в магме. Растворимость, всплытие пузырей.
- Фильтрация газа. Закон Дарси. Дегазация магм
- Моделирование течения многофазных сред. Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Система уравнений, описывающая многофазное, многоскоростное течение.
- Модели взаимодействия между фазами, обтекание твердой частицы.

**МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ**

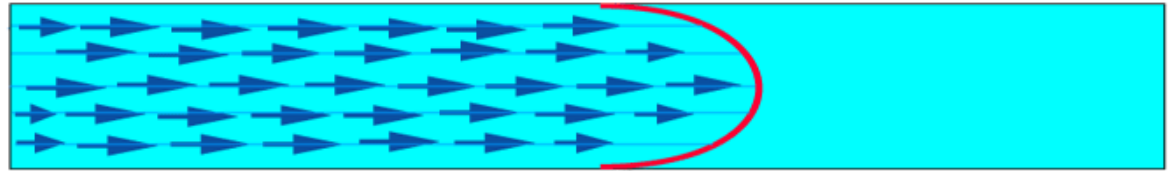
**ТЕЛ 939-5476, EMAIL: MELNIK@IMES.MSU.RU**

# Ламинарные и турбулентные течения



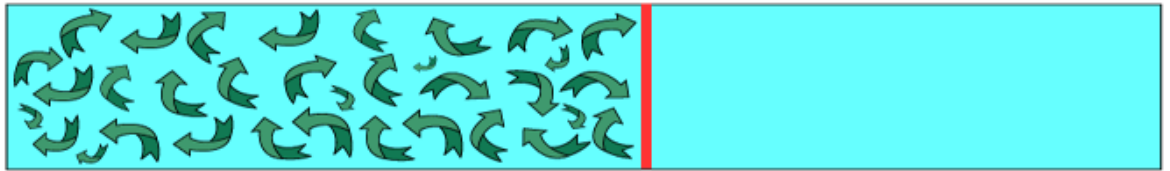
Osborne Reynolds  
(1842 - 1912)

Laminar Flow 



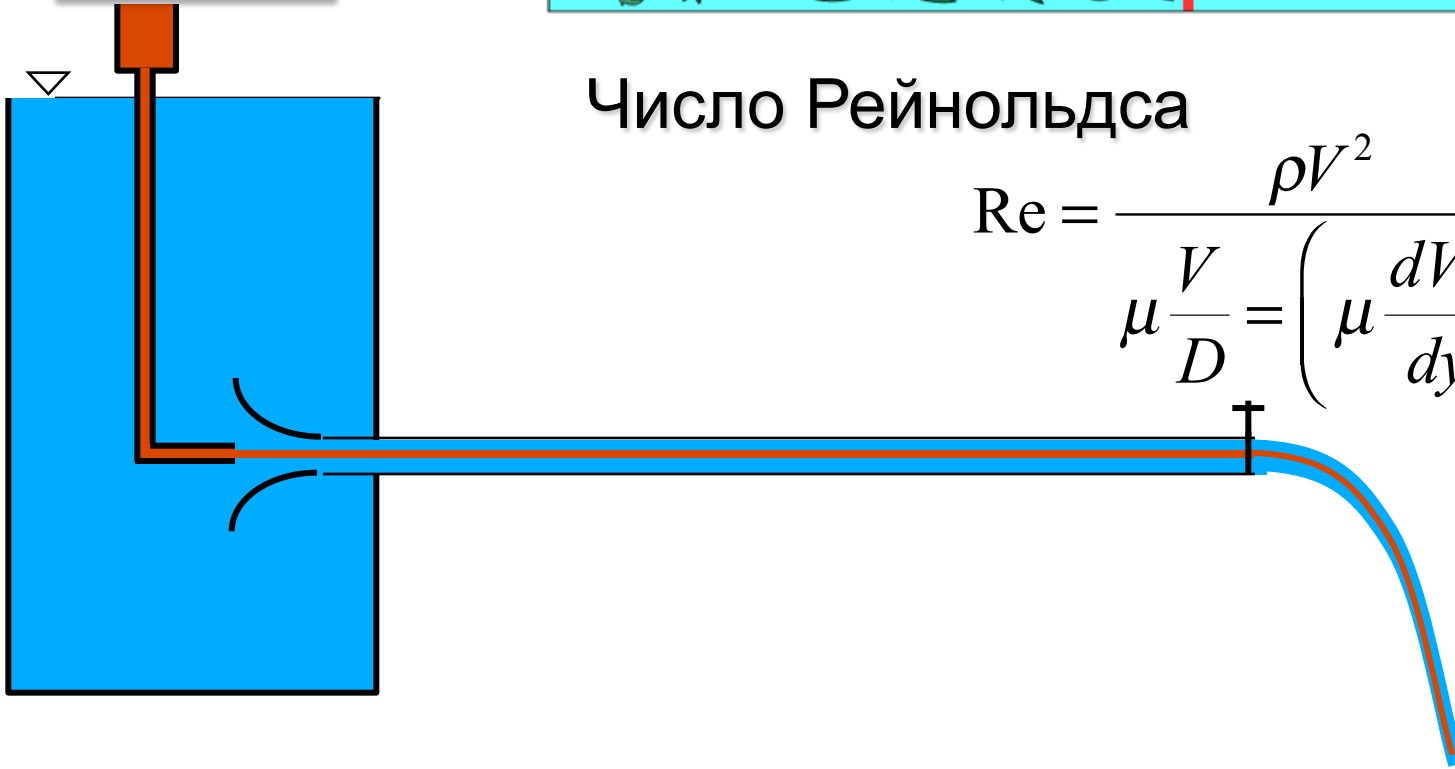
freshgasflow.com

Turbulent Flow 



Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho V^2}{\mu \frac{V}{D}} = \frac{\rho V D}{\mu}$$
$$\mu \frac{V}{D} = \left( \mu \frac{dV_x}{dy} \right)$$



Что происходит  
под вулканом?



# Движение магмы в канале

Критическое число Рейнольдса ~ 2000

Канал – 50 м

Вязкость  $10^5$  Па с

Скорость 1 м/с

Плотность 2500 кг/м<sup>3</sup>

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{2500 * 1 * 50}{10^5} = 1.25$$

**ДВИЖЕНИЕ ЛАМИНАРНО!**

Для газозвеси

Канал – 50 м

Вязкость  $10^{-5}$  Па с

Скорость 100 м/с

Плотность 10 кг/м<sup>3</sup>

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{10 * 100 * 50}{10^{-5}} = 5 \times 10^9$$

**ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНО!**

# Сила и коэффициент сопротивления канала

- Перепишем уравнение в гидравлическом приближении

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{dp}{dx} = -\frac{32\mu V_{av}}{D^2} = -\lambda \frac{\rho V_{av}^2}{2D}$$

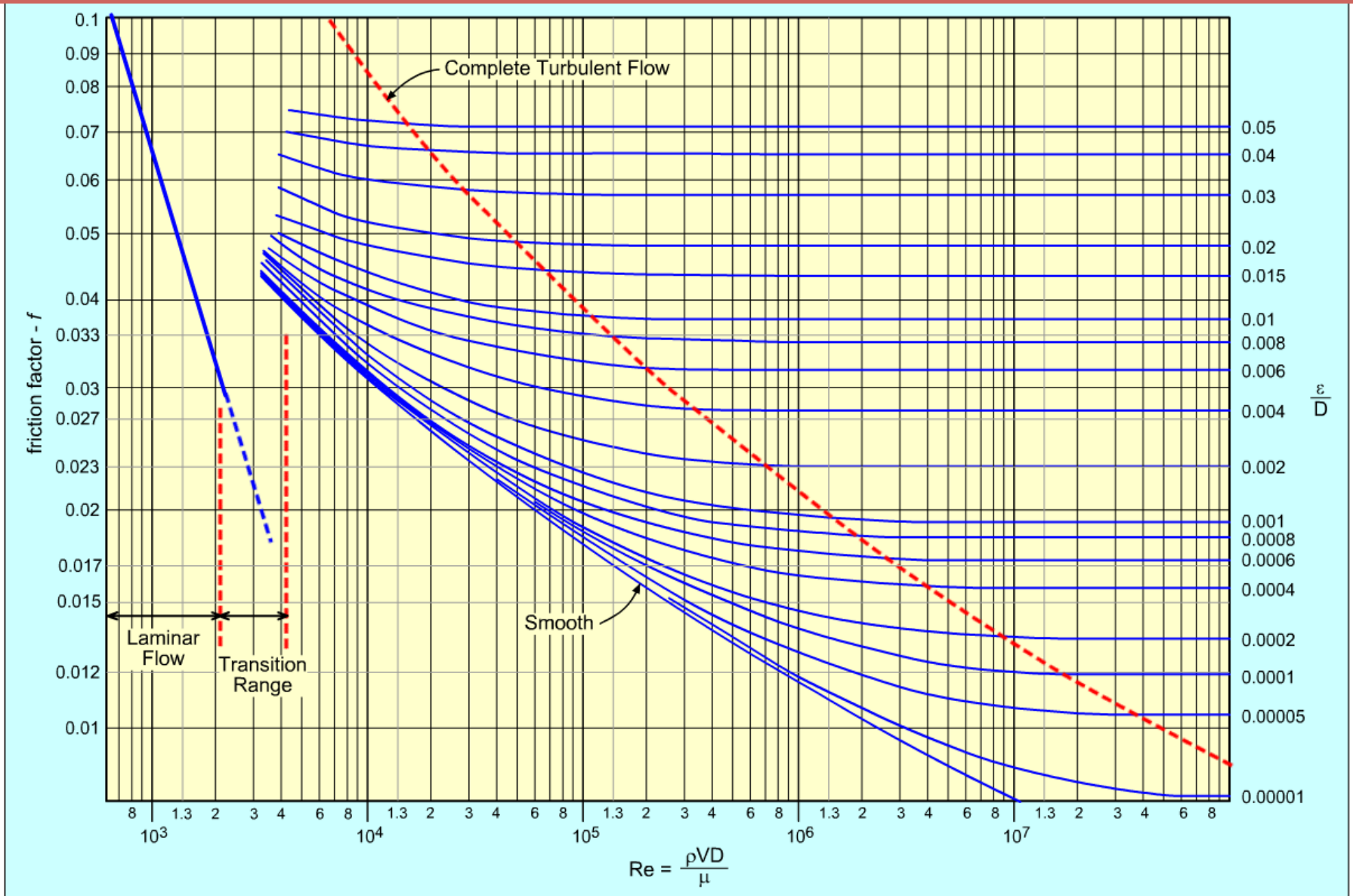
$$Re = \frac{\rho V_{av} D}{\mu}; \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$

Для турбулентного режима:

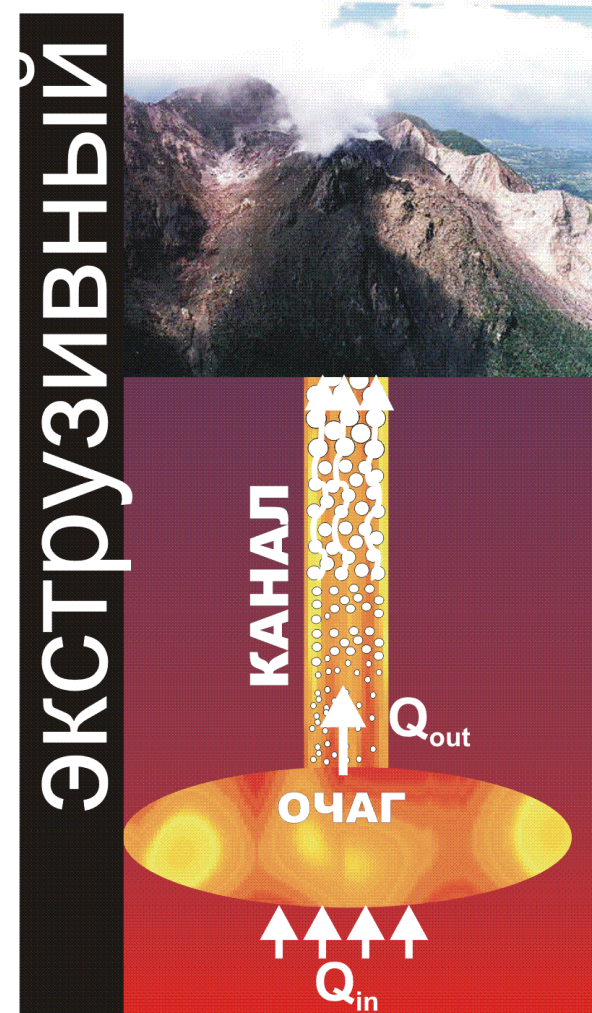
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[ \frac{2.51}{Re \times \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{D} \times 0.269 \right]$$



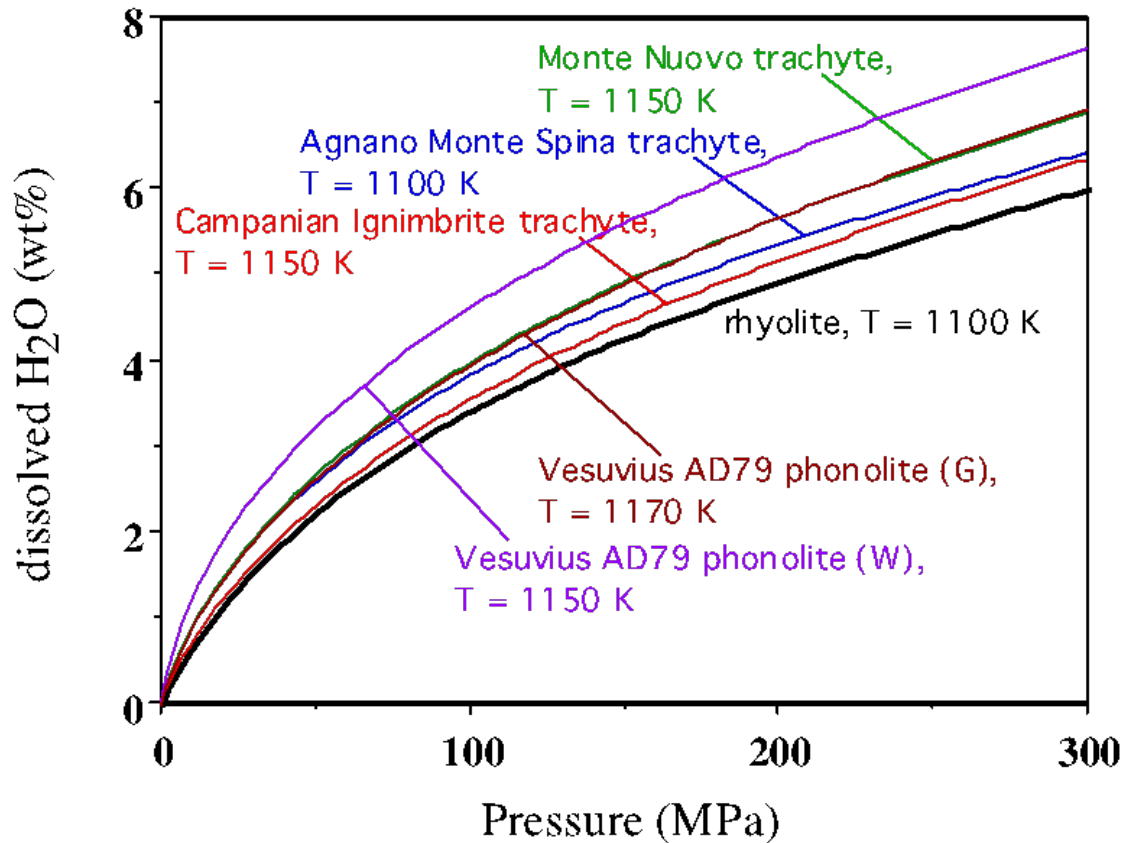
# Коэффициент сопротивления



# Летучие в магме



# Растворимость воды в силикатных расплавах

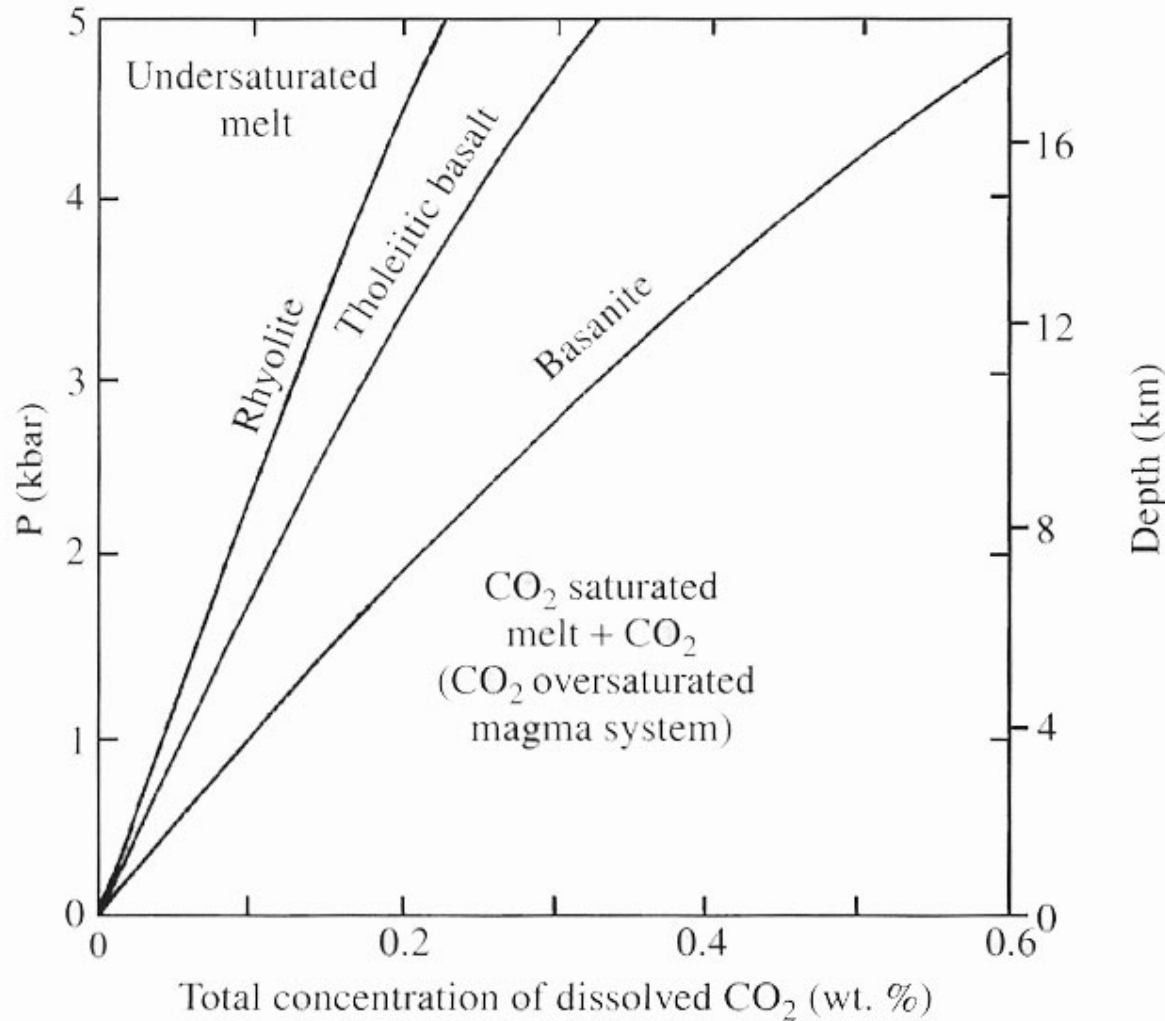


*After Papale, 1997*

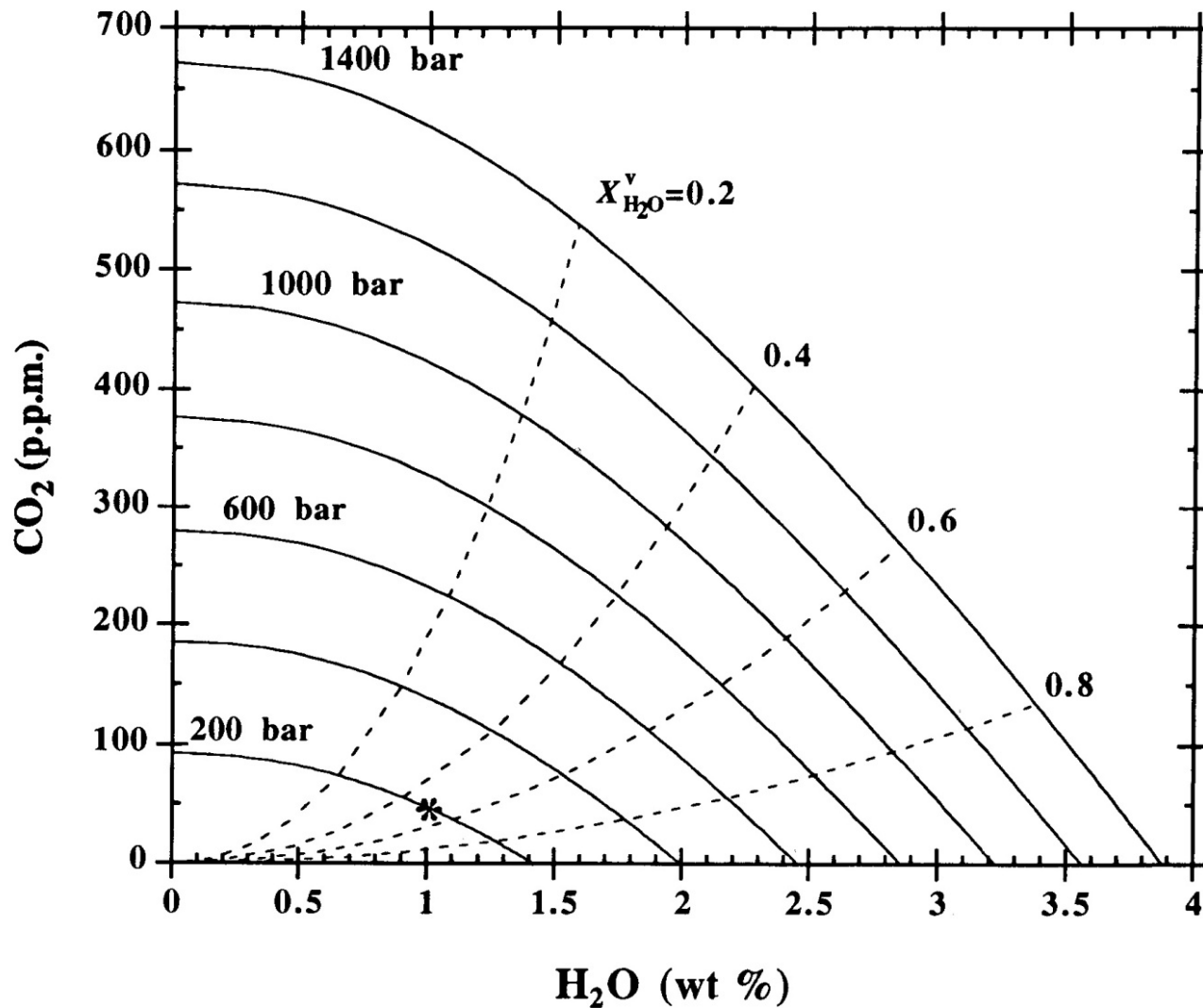
- :
- $X=Cp^n$
- $n\sim 0.5$ ,  
C (состав)



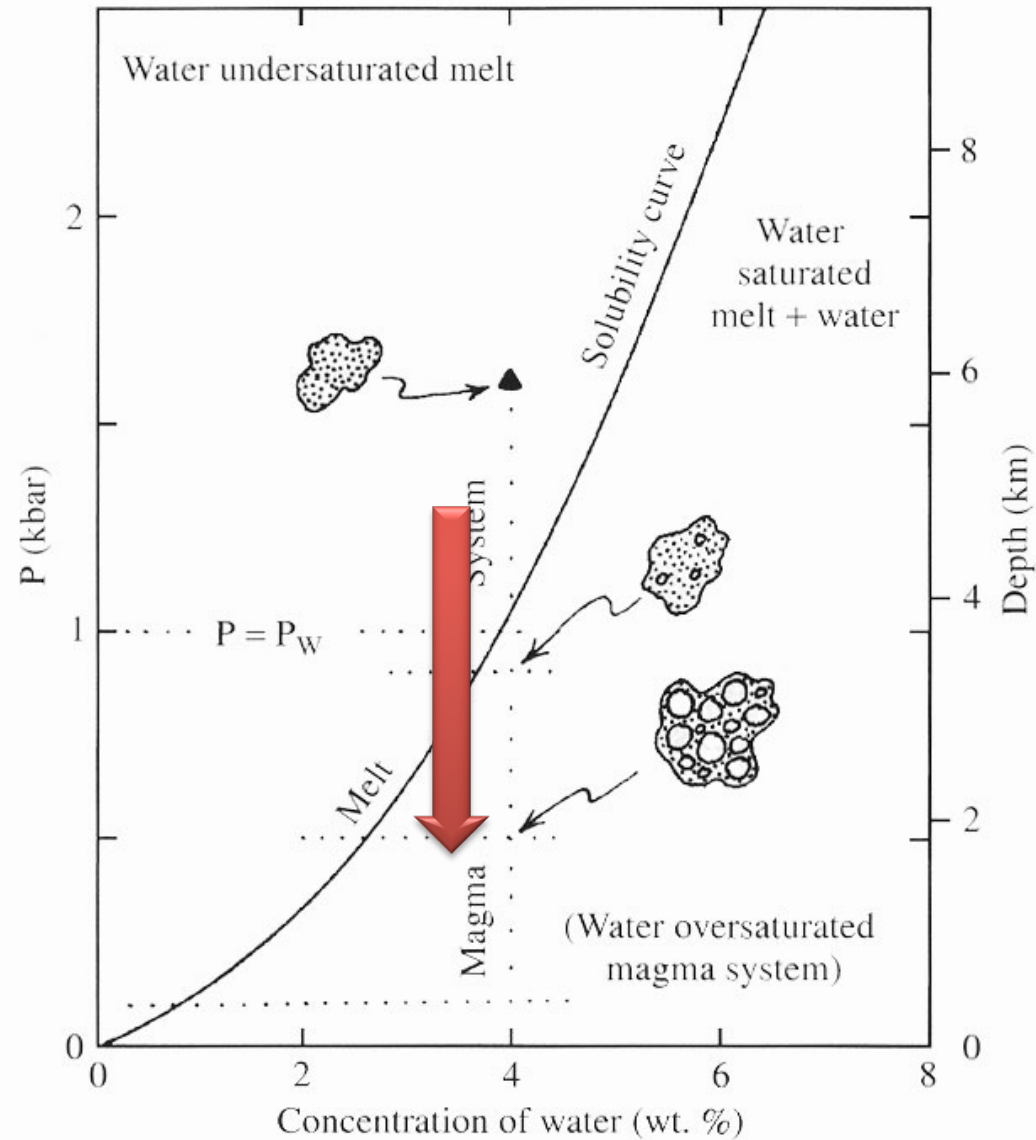
# Растворимость CO<sub>2</sub>



# Система $\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$

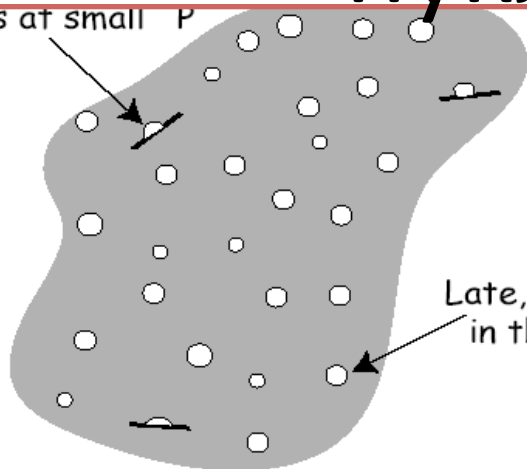


# Нуклеация пузырьков



# Гомогенная и гетерогенная нуклеация

on crystals at small  $P$



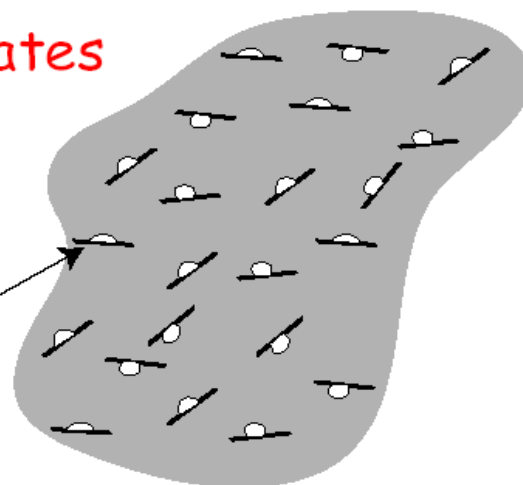
Crystallinity (cryptic sites)  
 $<10^4/\text{cm}^3$

Late, homogeneous nucleation  
in the bulk melt at large  $P$

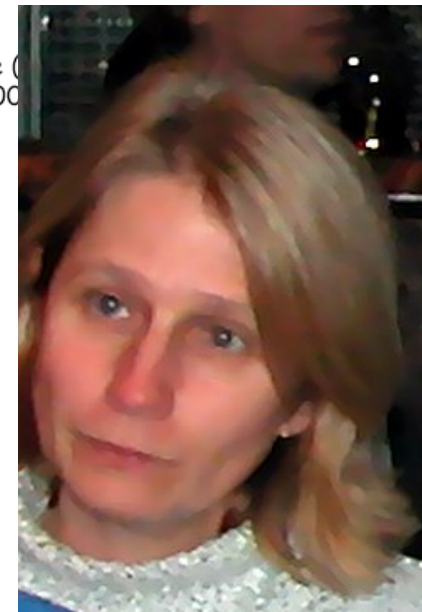
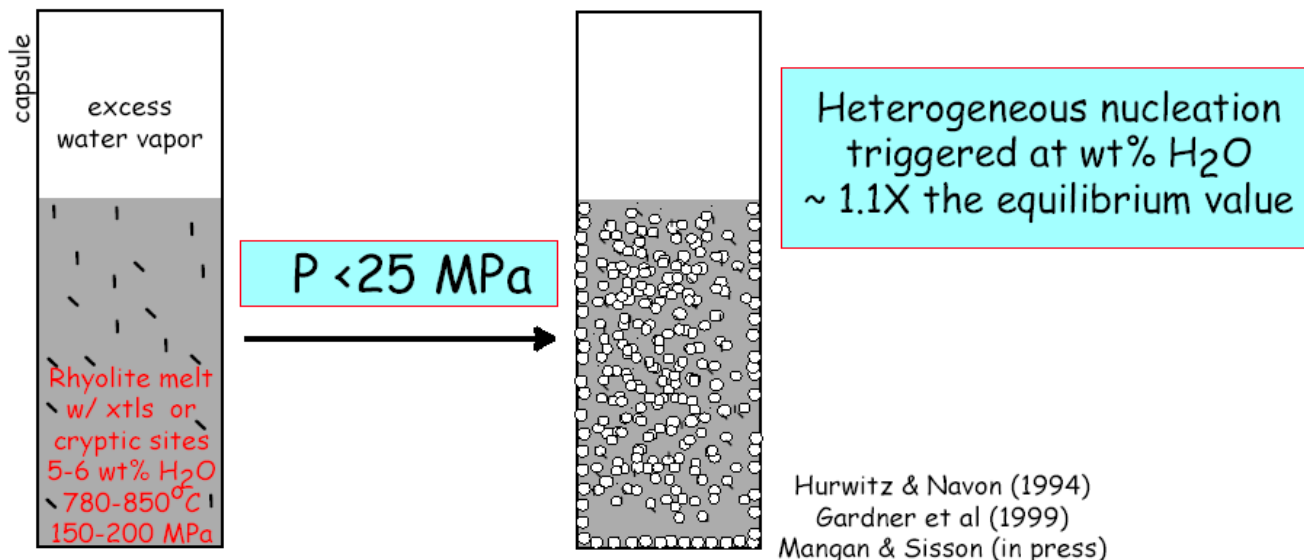
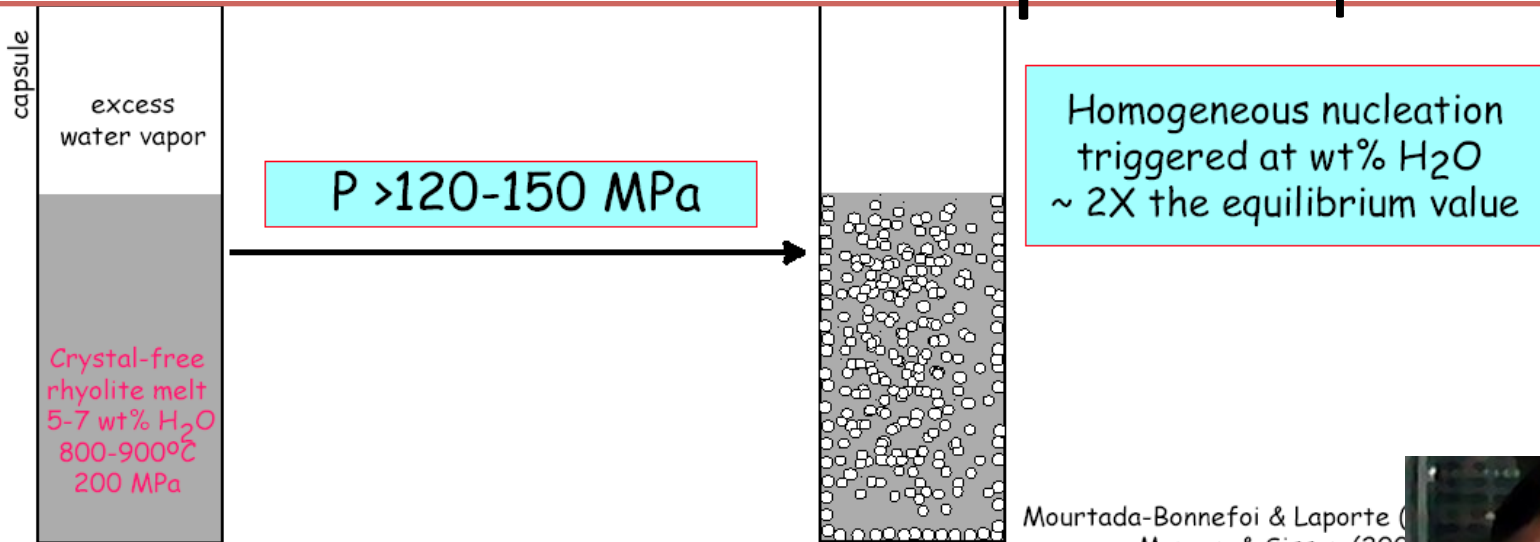
Heterogeneous Mechanism Dominates

Crystallinity (cryptic sites)  
 $>10^6/\text{cm}^3$

Early,  
heterogeneous nucleation  
on crystals at small  $P$ ,  
no homogeneous nucleation

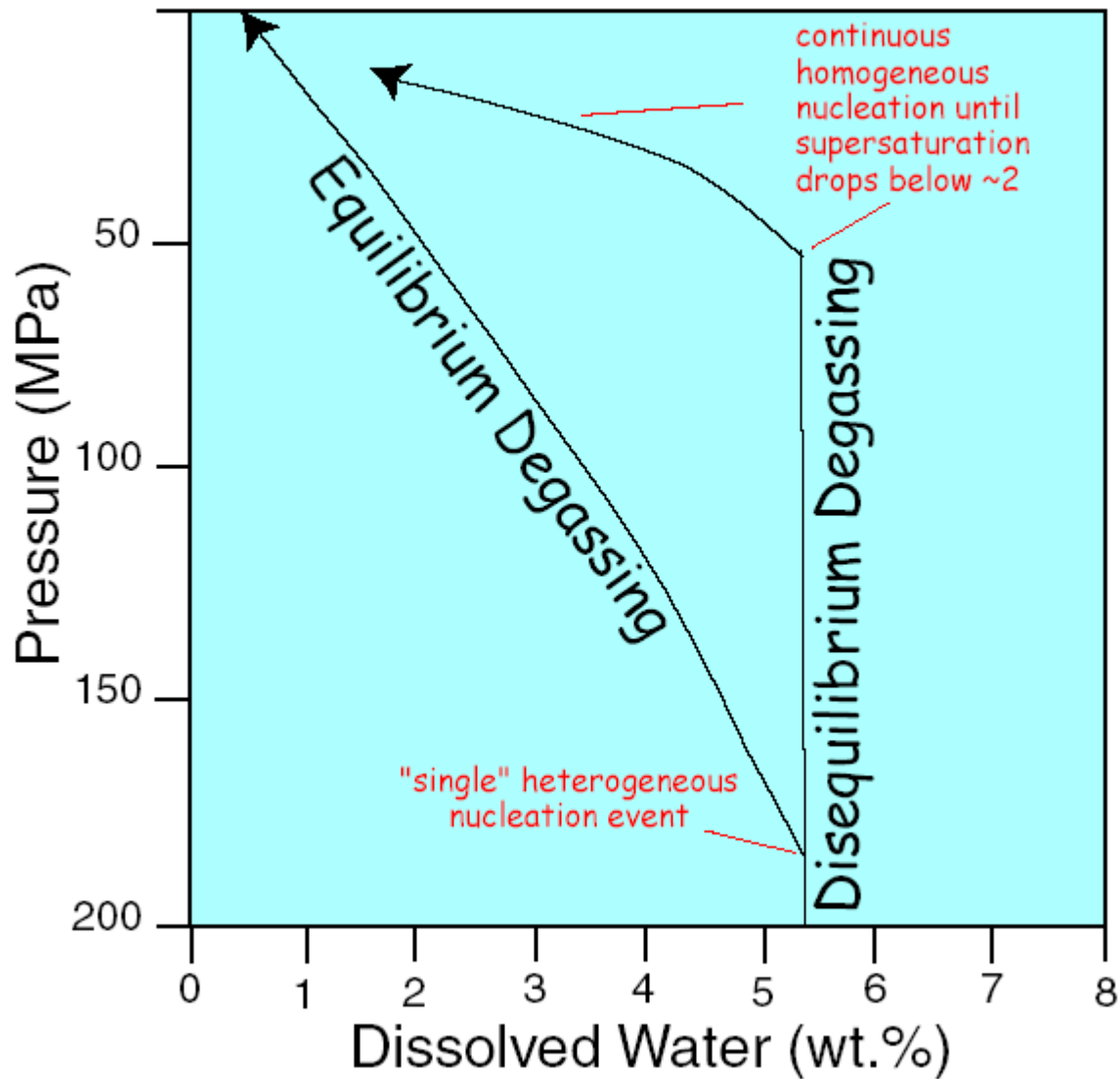


# Гомогенная нуклеация требует очень больших пересыщений



Margaret Mangan

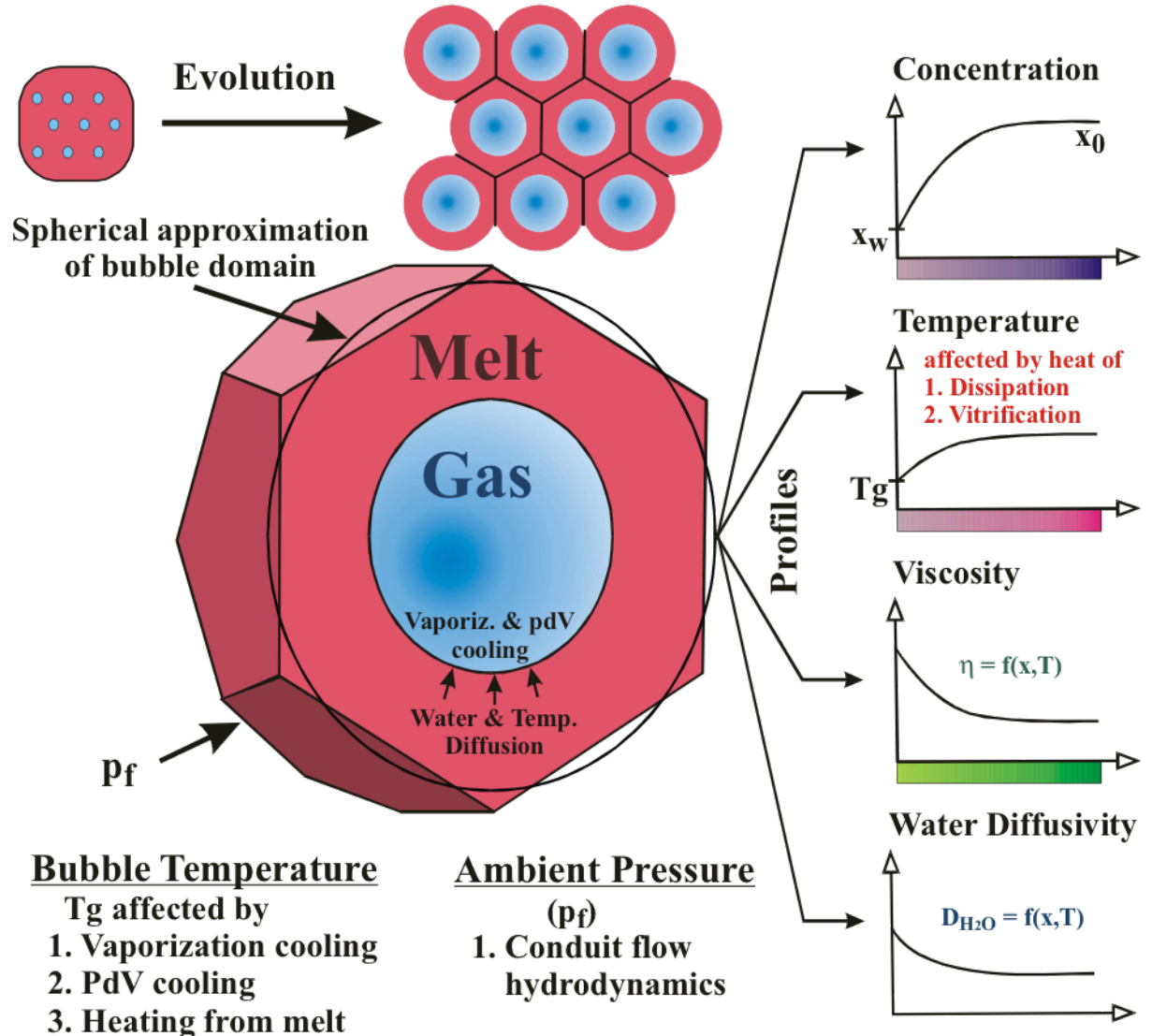
# Дегазация магмы



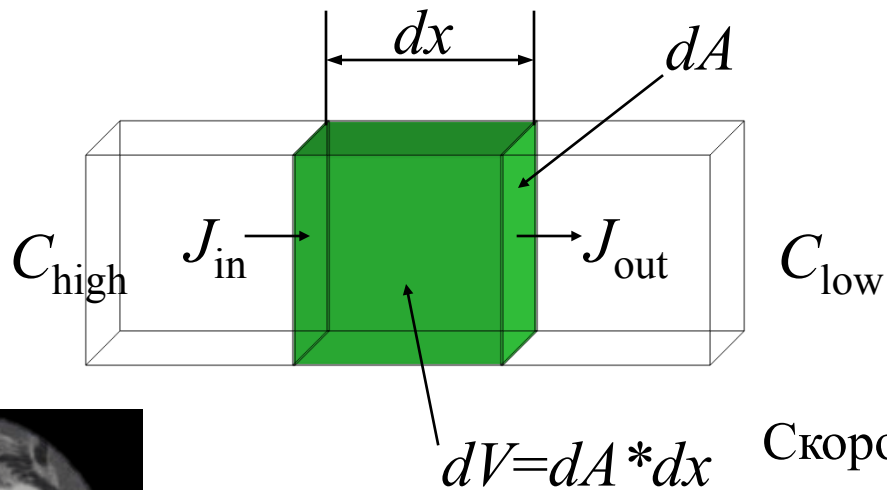
# Диффузионный рост пузырька



Alex Proussevitch



# Диффузия, закон Фика $J_m = -D_m \text{grad}(c)$



$$\frac{\partial C}{\partial t} dV = (J_{\text{in}} - J_{\text{out}}) dA$$

Скорость изменения концентрации атомов в объеме  $dV$  = Скорость притока – скорость оттока



Adolf Eugen Fick  
(1829-1901)

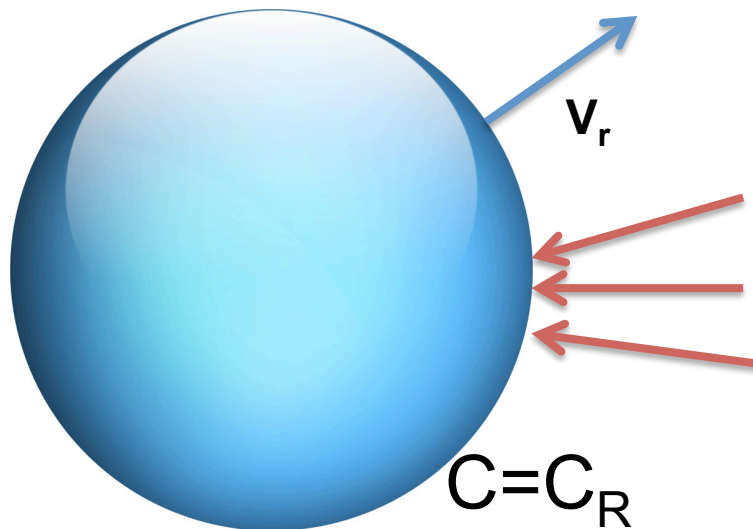
$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= (J_{\text{in}} - J_{\text{out}}) \frac{dA}{dV} = -\frac{\partial J}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -D \frac{\partial C}{\partial x} \right) = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$



# Уравнение диффузии в сферических координатах

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( D r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right)$$



$$J = -D \frac{\partial C}{\partial r}$$

$$C=C_0$$

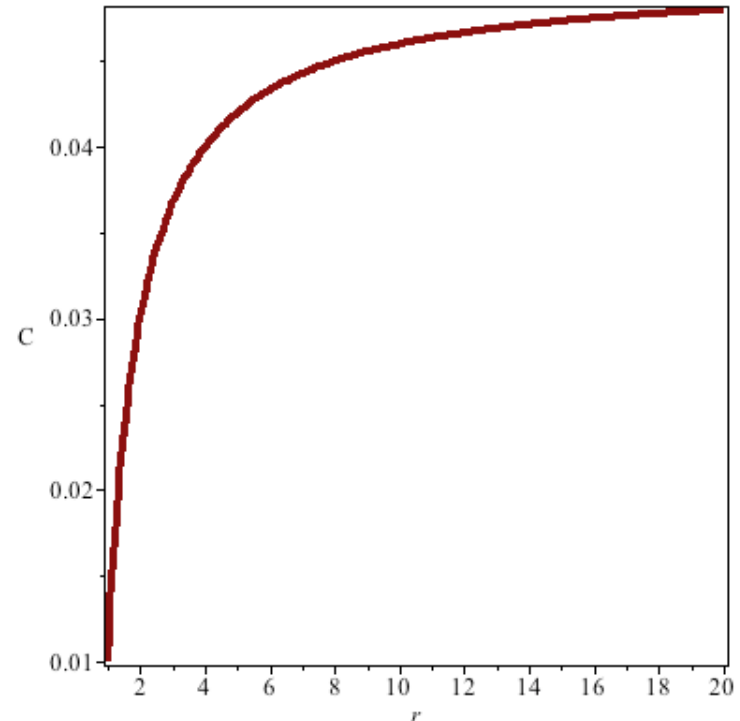
В случае большого  
коэффициента  
диффузии

Lyakhovsky, V., Hurwitz, S. & Navon, O.  
Bubble growth in rhyolitic melts:  
experimental and numerical investigation.  
Bull. Volcan. 58, 19–32 (1996).

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( D r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right)$$

$$C(r) = \frac{(-R + r)C_0 + C_R R}{r}$$

$$\left( \frac{\partial C}{\partial r} \right)_R = \frac{C_0 - C_R}{R}$$

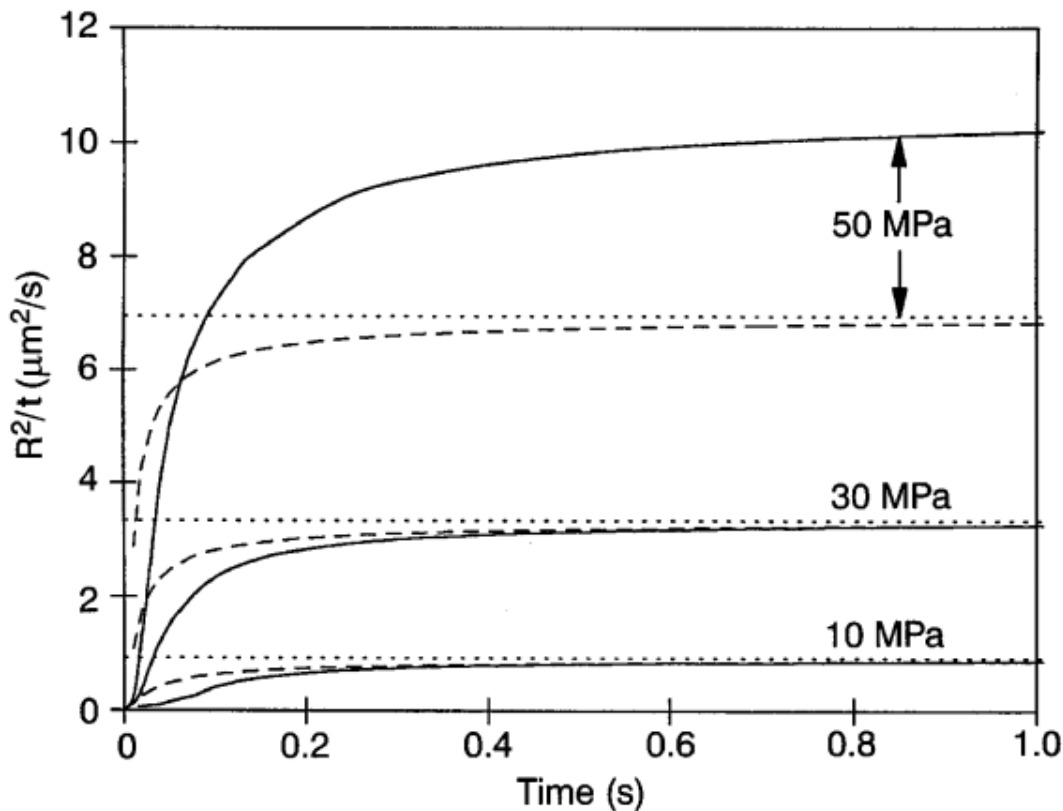


# Закон сохранения массы для одного пузырька

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi \rho_g R^3 \right) = 4 \pi R^2 \rho_m D \left( \frac{\partial C}{\partial r} \right)_R$$

С учетом выражения для градиента концентрации

$$R^2 = \frac{2Dt\rho_m (c_0 - c_R)}{\rho_g}$$



# Миграция летучих в магме





# Вулкан Эребус



#2 127 107 05 10:31:50



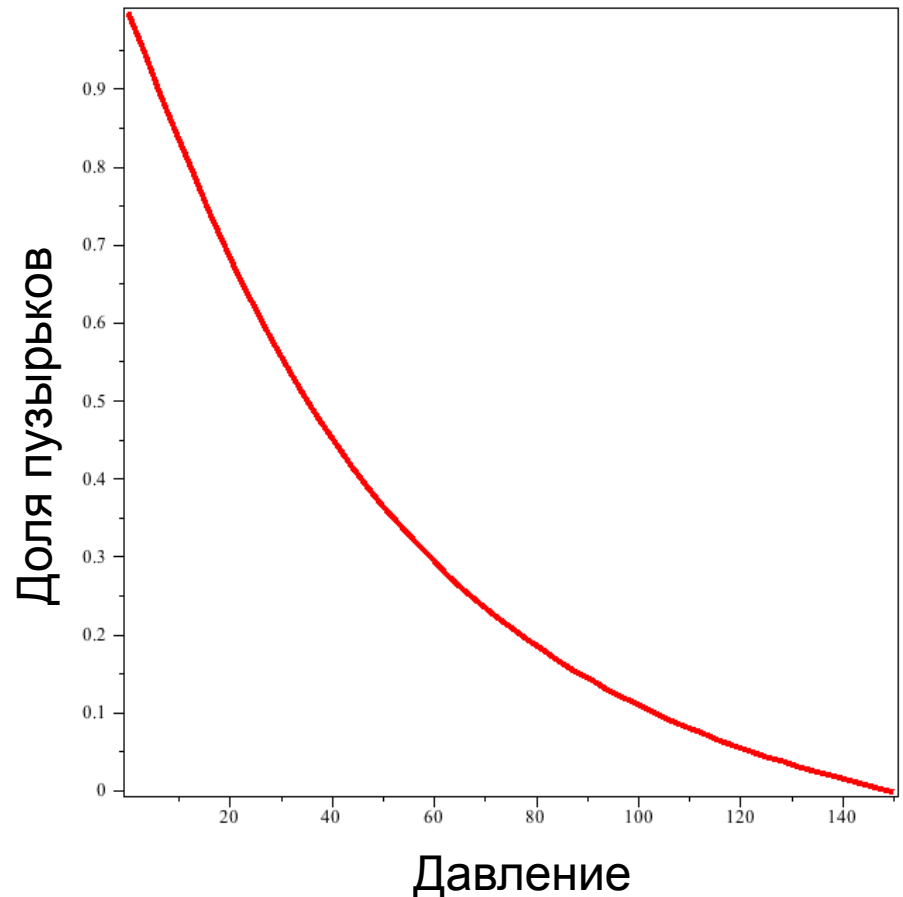
# Если газ поднимается вместе с магмой.

Плотность магмы как функция массовой доли газа.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x_0 - x}{\rho_g^0} + \frac{1 - (x_0 - x)}{\rho_m^0}$$

$$x = C\sqrt{p}; \rho_g^0 = \frac{p}{RT}; \rho_m^0 = const$$

Если бы газ не двигался относительно магмы, то при атмосферном давлении она состояла бы на 99% из пузырьков!



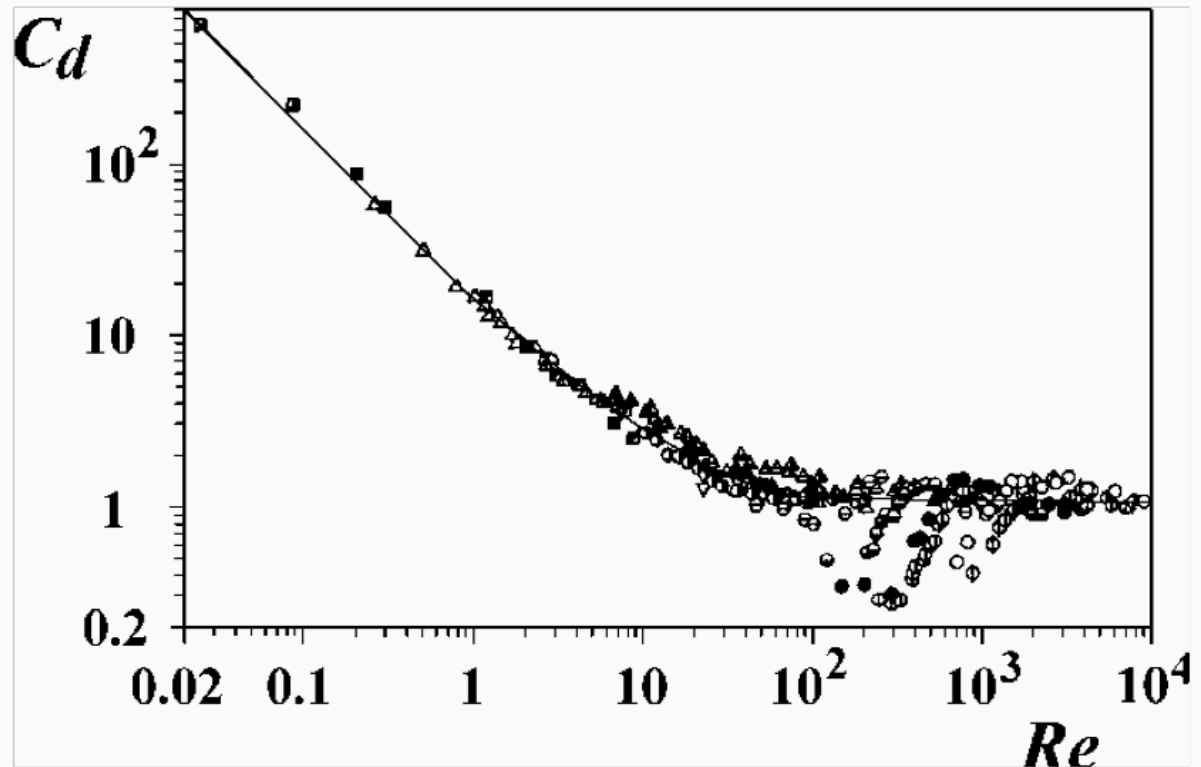
# Скорость всплывания одиночного пузырька

$$Re_v = \frac{R\rho_l V}{\mu}$$

$$F = C_d \frac{\rho_l V^2}{R}$$

При малых числах  
Рейнольдса

$$C_d = \frac{16}{Re}; Re < 10$$



# Скорость всплывания одиночного пузырька

$$F_A = (\rho_l - \rho_g)g = \frac{16 \rho_l V^2}{\text{Re} R} = \frac{16 \mu_l}{R^2} V = F_\mu$$

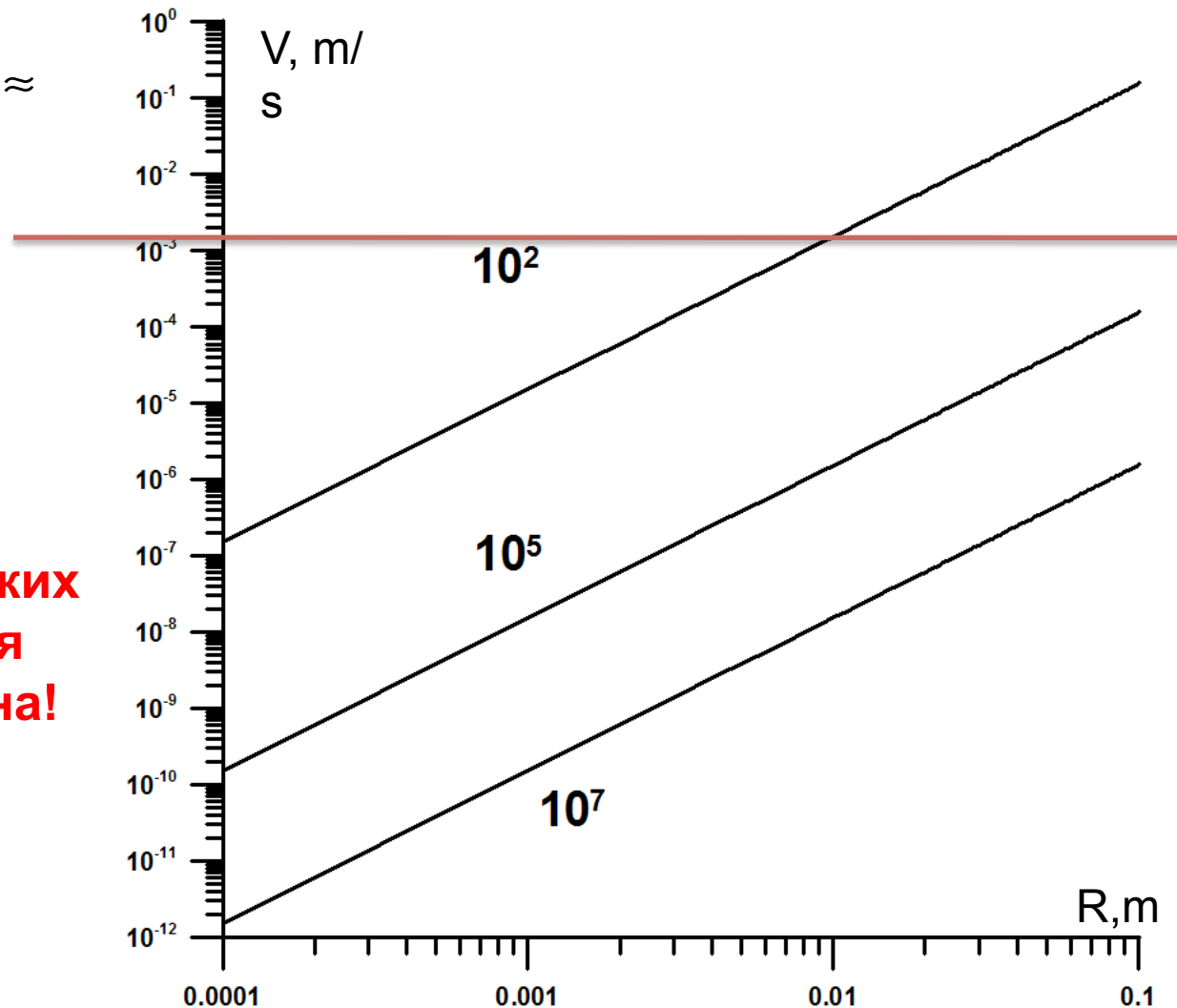
$$\rho_l \gg \rho_g \rightarrow V = \frac{\rho_l g R^2}{16 \mu} \approx$$

$$1530 \frac{R^2}{\mu}$$

пузырька

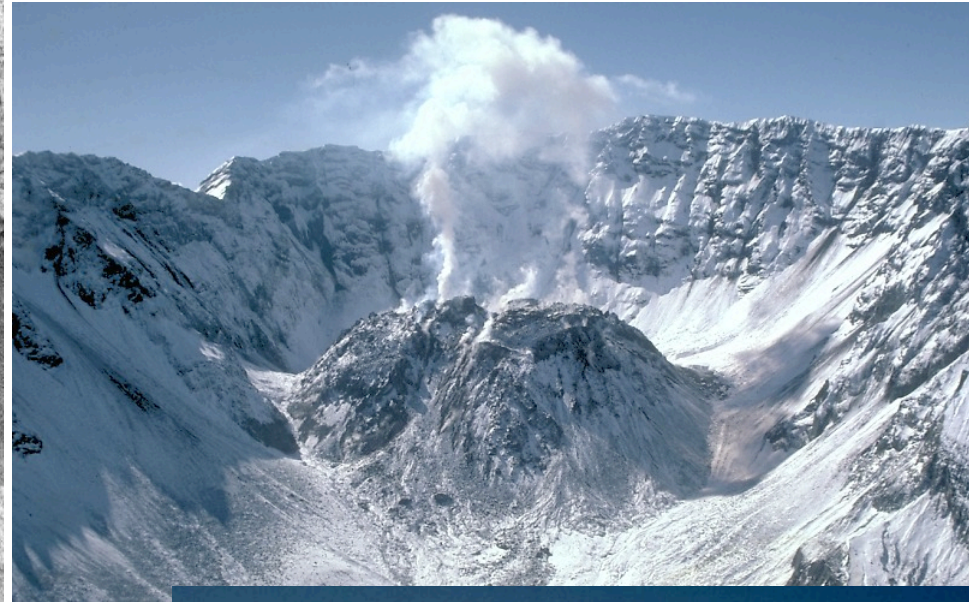
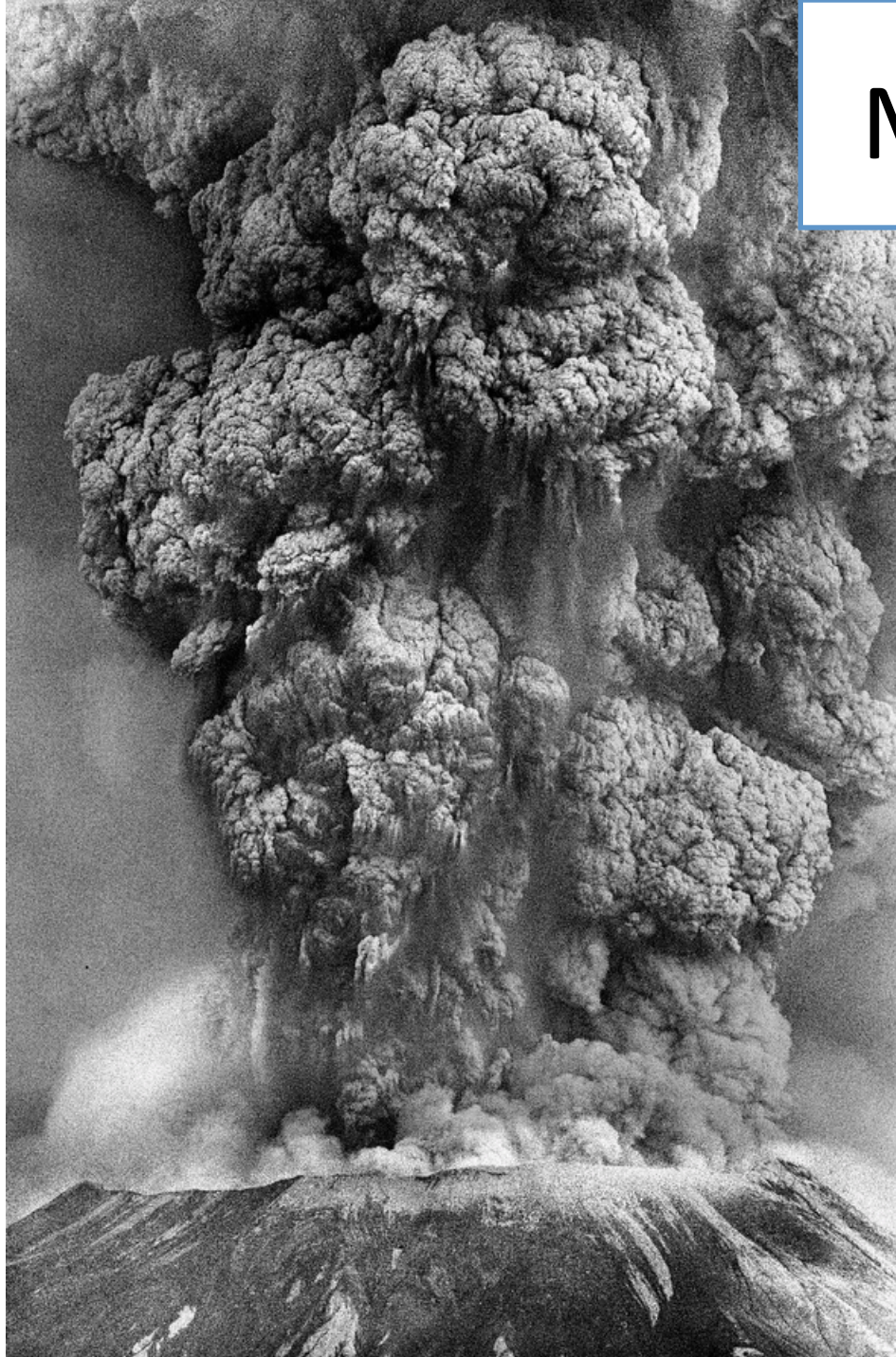
**Дегазация высоковязких магм за счет всплытия пузырьков невозможна!**

**А как же лавовые купола?**

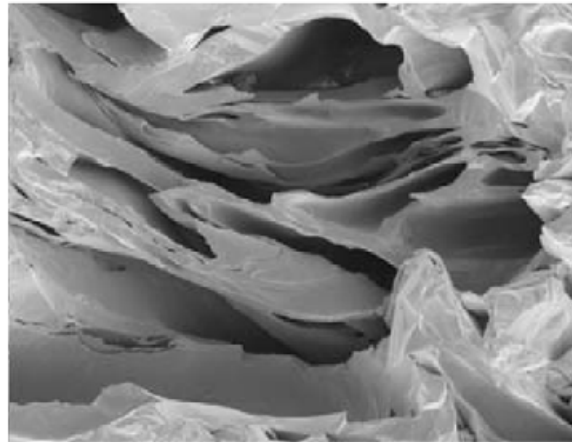
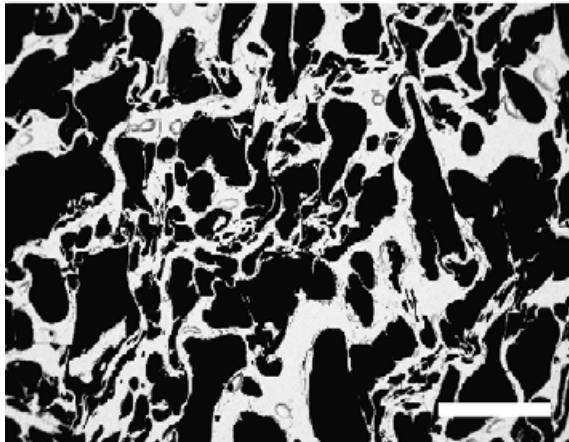
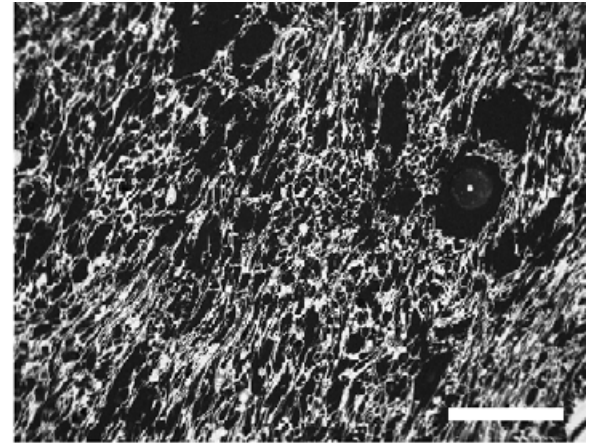
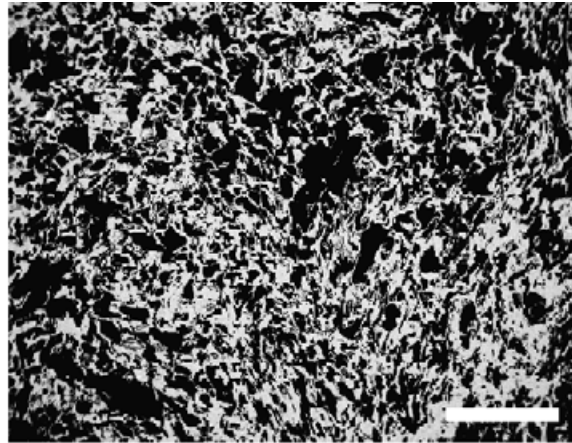
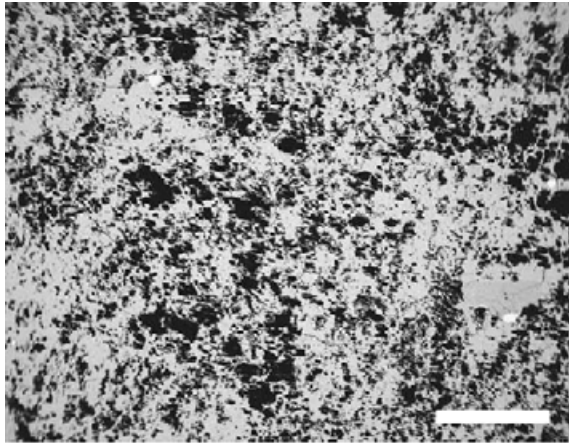




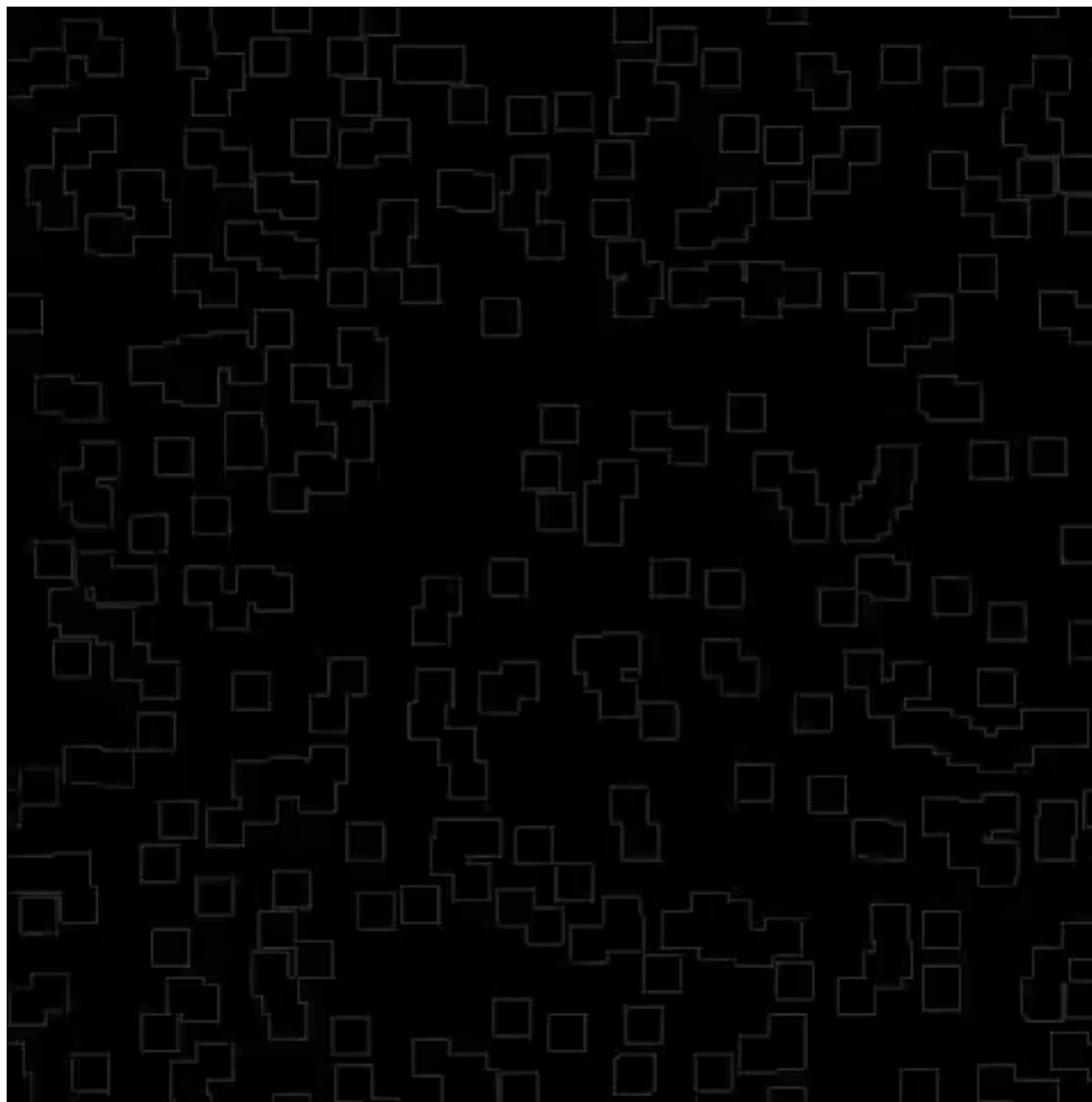
# Маунт Сент Хеленс



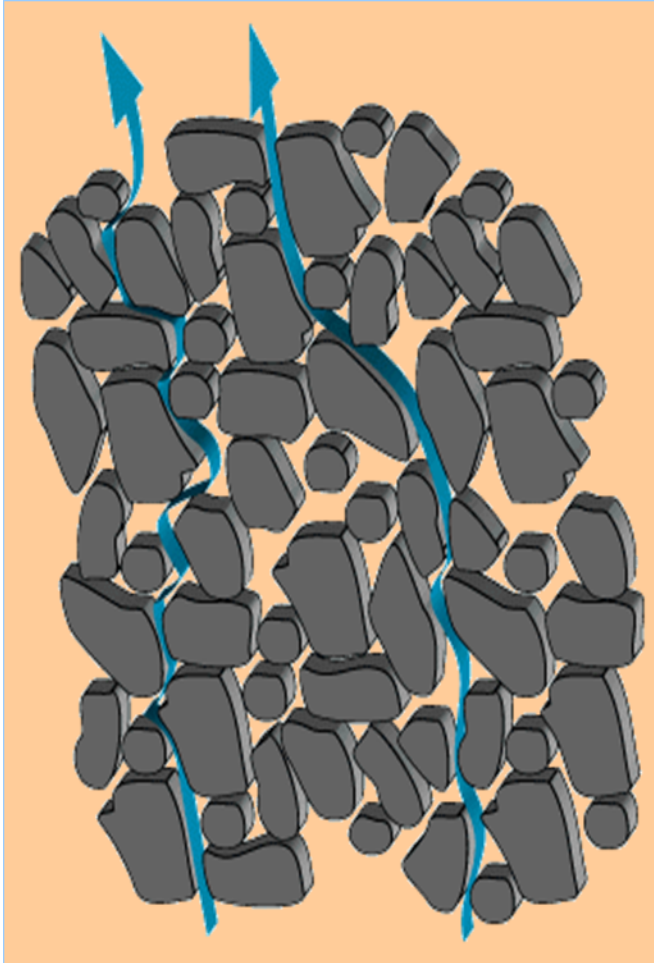
# Пузырьки в магме не сферические и не изолированные



# Фильтрация



# Закон Дарси



Проницаемая  
пористая среда, газ  
занимает объем  $\alpha$

## Закон Дарси

$$\vec{U}_g = -\frac{k(\alpha)}{\mu_g} \text{grad}(P);$$

$$\text{grad}(P) = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x, \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y, \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$



Henry Darcy

# Аналог между течениями Дарси и Пуазейля



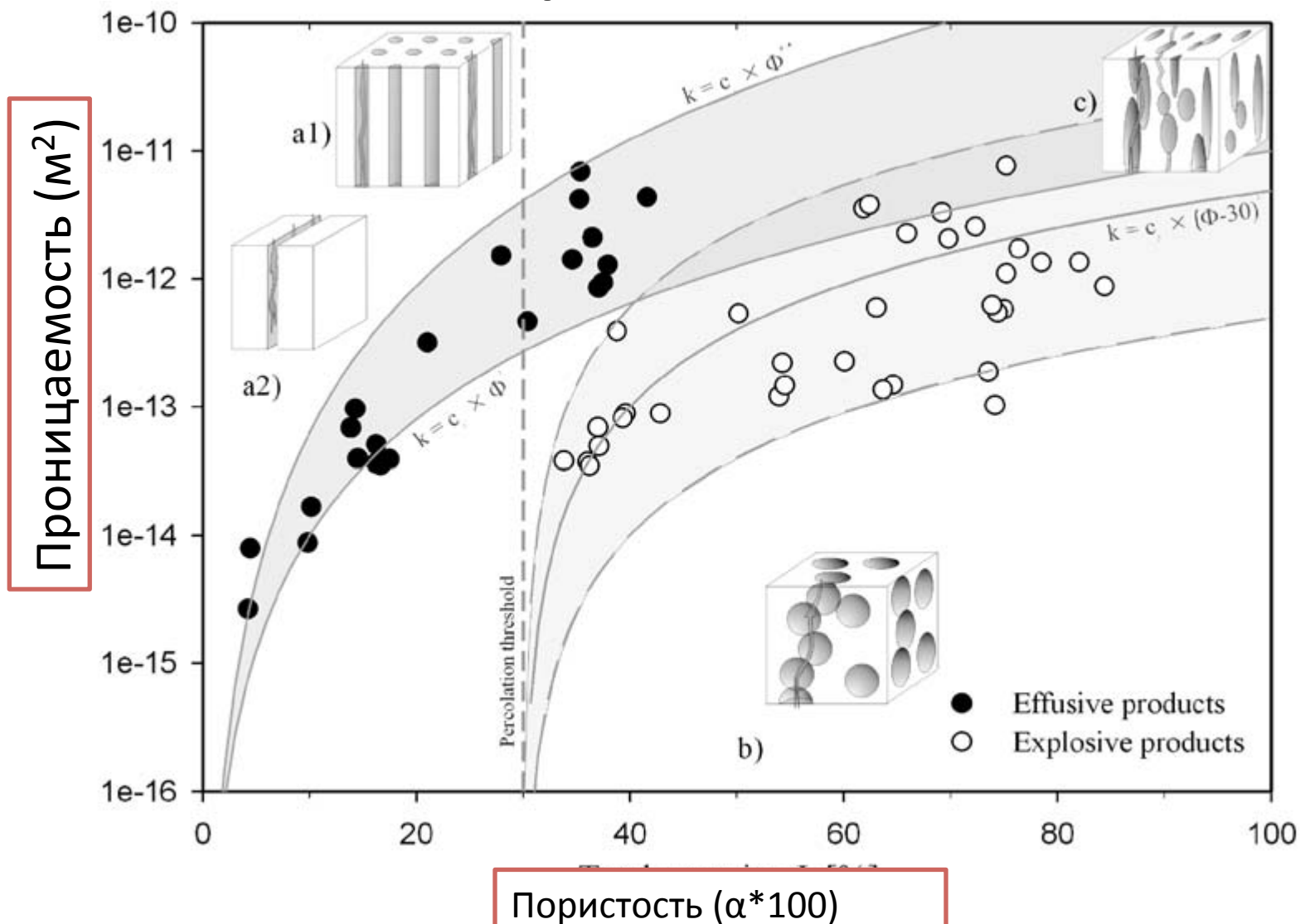
Представим пористую среду как набор параллельных труб, диаметра  $D$ . Тогда:

$$U = \alpha V = -\alpha \frac{D^2}{32\mu} \frac{dp}{dx} = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

Отсюда следует

$$k = \alpha \frac{D^2}{32}$$

# Зависимость проницаемости от пористости



# Оценки для скорости фильтрации газа.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= -\rho(1-\alpha)g - 32\frac{\mu V}{D^2} = \\ &= -2500 * 0.5 * 9.8 - 32\frac{10^7 10^{-3}}{30^2} = -12605\frac{\text{Pa}}{\text{m}}\end{aligned}$$

Оценим скорость движения газа сквозь магму

$$\frac{V_g - V}{V} = -\frac{k(\alpha)}{\alpha\mu_g V} \frac{dp}{dx} = \frac{12605 * 10^{-12}}{0.5 * 10^{-5} 10^{-3}} \approx 2.5$$

**Газ движется в 2.5 раза быстрее магмы! Дегазация возможна**

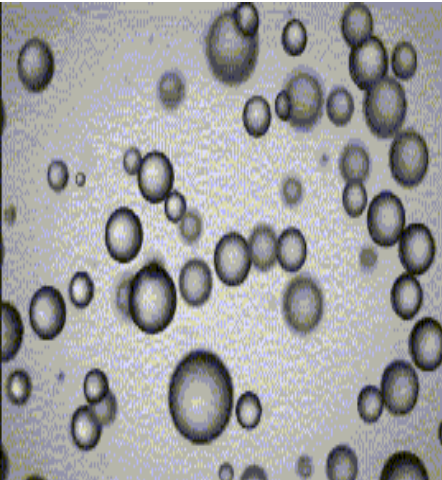
# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД.

- Гипотеза взаимопроникающих континуумов.
- Модели взаимодействия между фазами

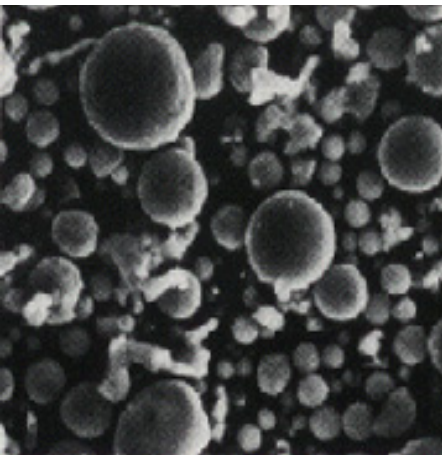


# Описание дисперсных систем

пузырьки



частицы



## Параметры многофазных сред

$$\text{Приведенная плотность} = \frac{m_i}{\Omega_{mixture}} = \rho_i$$

$$\text{Истинная плотность} = \frac{m_i}{\Omega_i} = \rho_i^0$$

$$\text{Объемная доля} = \frac{\Omega_i}{\Omega_{mixture}} = \alpha_i$$

$$\text{Массовая доля} = \frac{m_i}{m_{mixture}} = X_i$$

$$\Omega_{mixture} = \sum \Omega_i; \quad m_{mixture} = \sum m_i$$

# Параметры смеси

$$\frac{\sum m_{ij} V_{ij}}{m_i} = V_i$$

Скорость отдельной фазы

$$\frac{\sum \rho_i V_i}{\rho_{mixture}} = V$$

Среднемассовая скорость смеси

$$\rho_{mixture} = \sum \rho_i$$

Уравнения неразрывности

Уравнения импульса

Поток массы

Силовое взаимодействие

# Плотность двухфазной среды

$$\rho = (1 - \alpha) \rho_l^0 + \alpha \rho_g^0$$

Через объемную долю газа

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x_g}{\rho_g} + \frac{1 - x_g}{\rho_l}$$

Через массовую долю газа

# Структура уравнений для двухфазной смеси (1D)

$$\frac{\partial \rho_g^0 \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g^0 \alpha V_g}{\partial x} = J_{lg}; \quad \frac{\partial \rho_l^0 (1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l^0 (1-\alpha) V_l}{\partial x} = -J_{lg};$$

$$\rho_g^0 \alpha \left( \frac{\partial V_g}{\partial t} + V_g \frac{\partial V_g}{\partial x} \right) = -\alpha \frac{\partial p_g}{\partial x} - F_{gl} + g_g + \dots$$

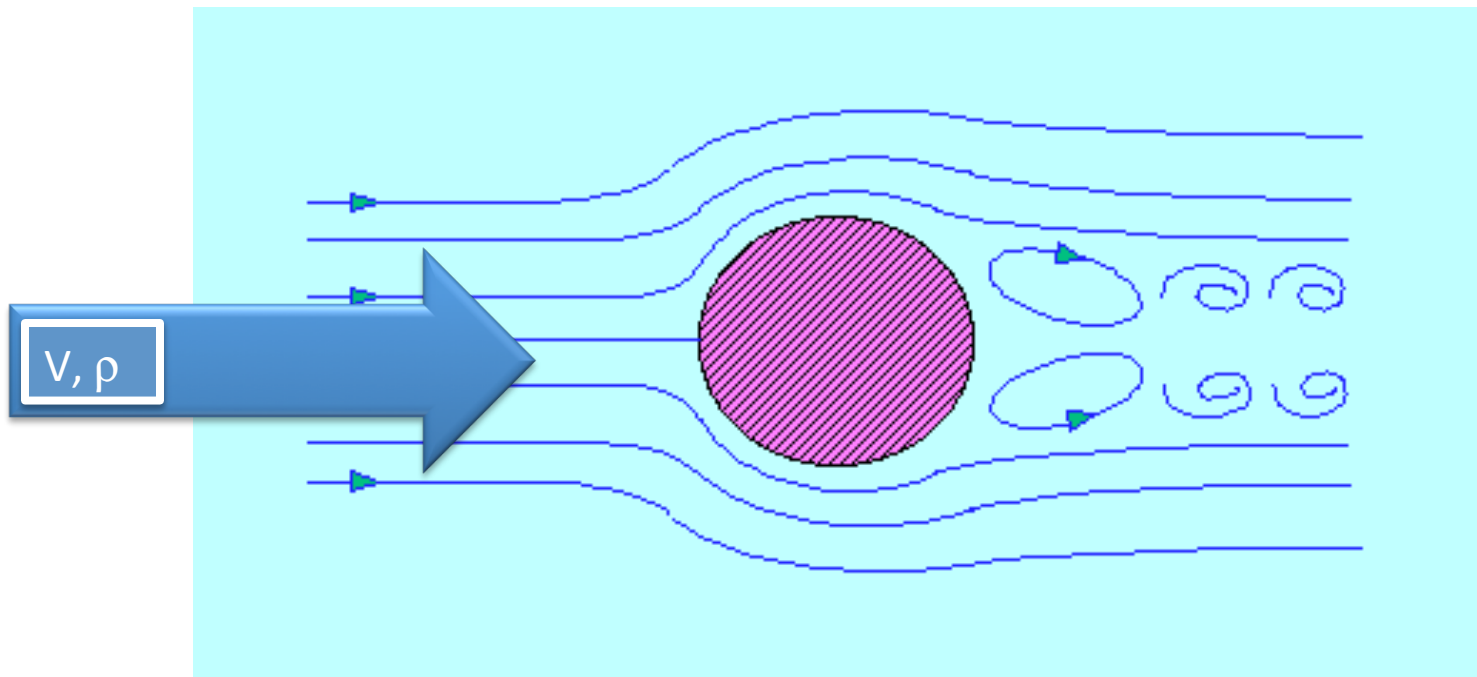
$$\rho_l^0 (1-\alpha) \left( \frac{\partial V_l}{\partial t} + V_l \frac{\partial V_l}{\partial x} \right) = -(1-\alpha) \frac{\partial p_l}{\partial x} + F_{gl} + g_l + \dots$$

$$\rho_l^0 = const; \quad \rho_g^0 = \frac{p_g}{R_g T}$$

За счет разности скоростей фаз происходит обтекание частиц или пузырьков, порождающее силы

## **СИЛЫ МЕЖФАЗНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

# Обтекание сферической частицы



# Сила и коэффициент сопротивления

Полная сила,  
действующая на  $F_d$   
частицу

$$F_d = C_D A_p \frac{\rho V^2}{2}$$

Коэффициент  
сопротивления

$$Re_p = \frac{d_p V \rho}{\mu}$$

Площадь миделева  
сечения =  $\pi d_p^2 / 4$

(1)  $Re_p < 2$ , ламинарное (**Закон Стокса**)

$$C_D = \frac{24}{Re_p}$$

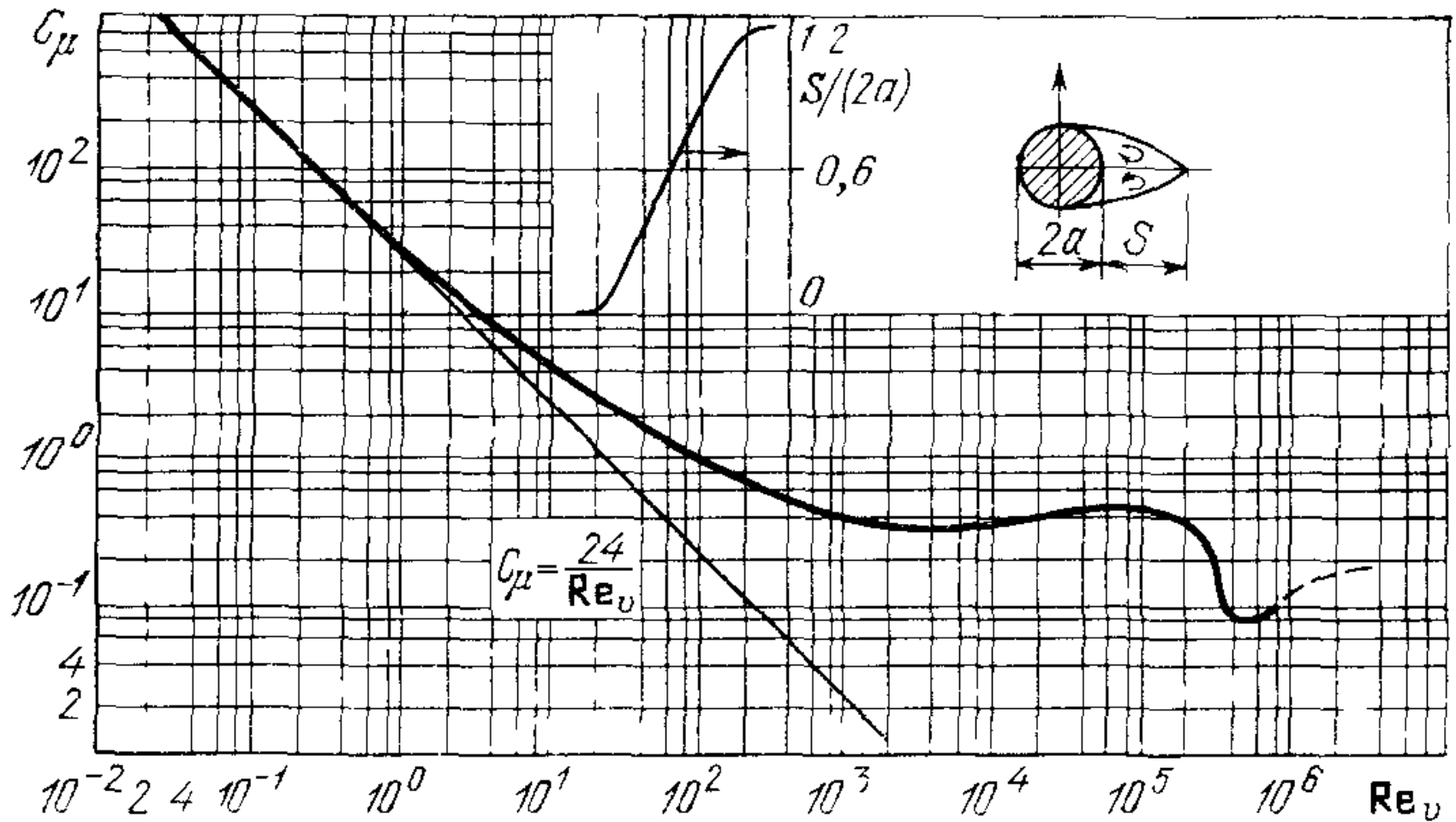
(2)  $2 < Re_p < 500$ , переходное (**Закон Аллена**)

$$C_D = \frac{18.5}{Re_p^{0.6}}$$

(3)  $500 < Re_p < 2 \times 10^5$ , турбулентное (**закон Ньютона**)

$$C_D \approx 0.44$$

# Коэффициент сопротивления в зависимости от Re





В случае трехмерного поля скоростей газа и движения частицы выражение для силы:

$$\vec{F}_d = C_D A_p \frac{\rho_g |\vec{V}_g - \vec{V}_p| (\vec{V}_p - \vec{V}_g)}{2}$$

# Итак:

- Узнали от чего зависит режим течения жидкости
- Обсудили роль летучих в вулканических процессах
- Определили возможный механизм дегазации магмы при подъеме.
- Познакомились с методами описания многофазных сред.