Введение в гидромеханику.

•Основные уравнения механики сплошной среды (уравнения неразрывности и сохранения импульса).

- Подъем магмы в каналах и дайках. Течение Пуазейля.
- Простейшая модель извергающегося вулкана.

МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ

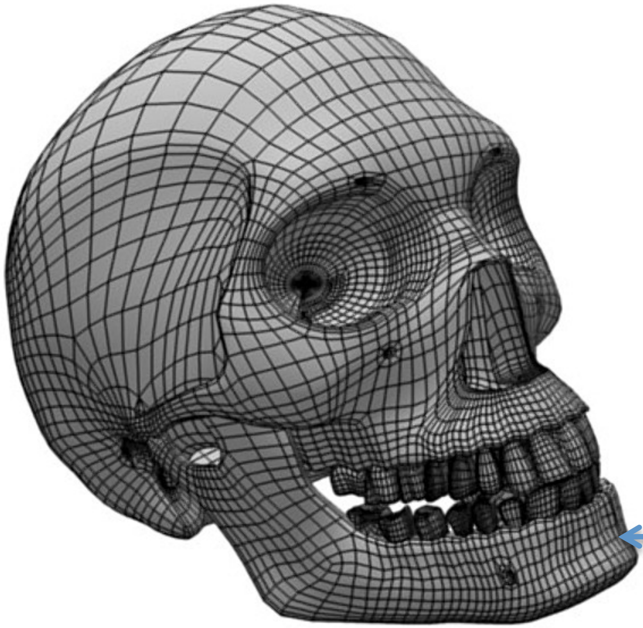
ТЕЛ 939-5476, EMAIL: MELNIK@IMEC.MSU.RU

Страница курса в Интернете:
http://wiki.web.ru/wiki/Геологический_факультет_МГУ:Вулканология

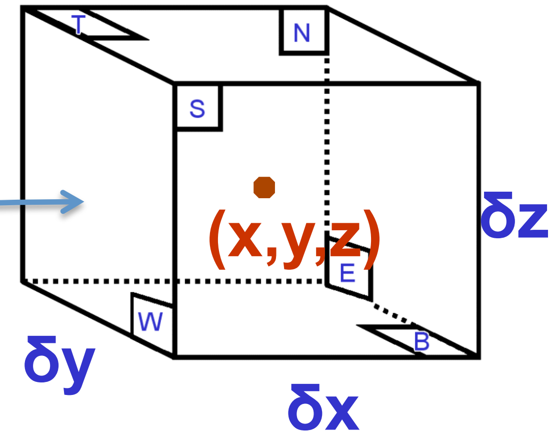
Уравнения механики сплошной среды

Законы сохранения массы и импульса

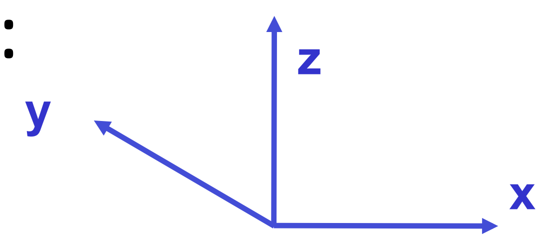
Что такое сплошная среда



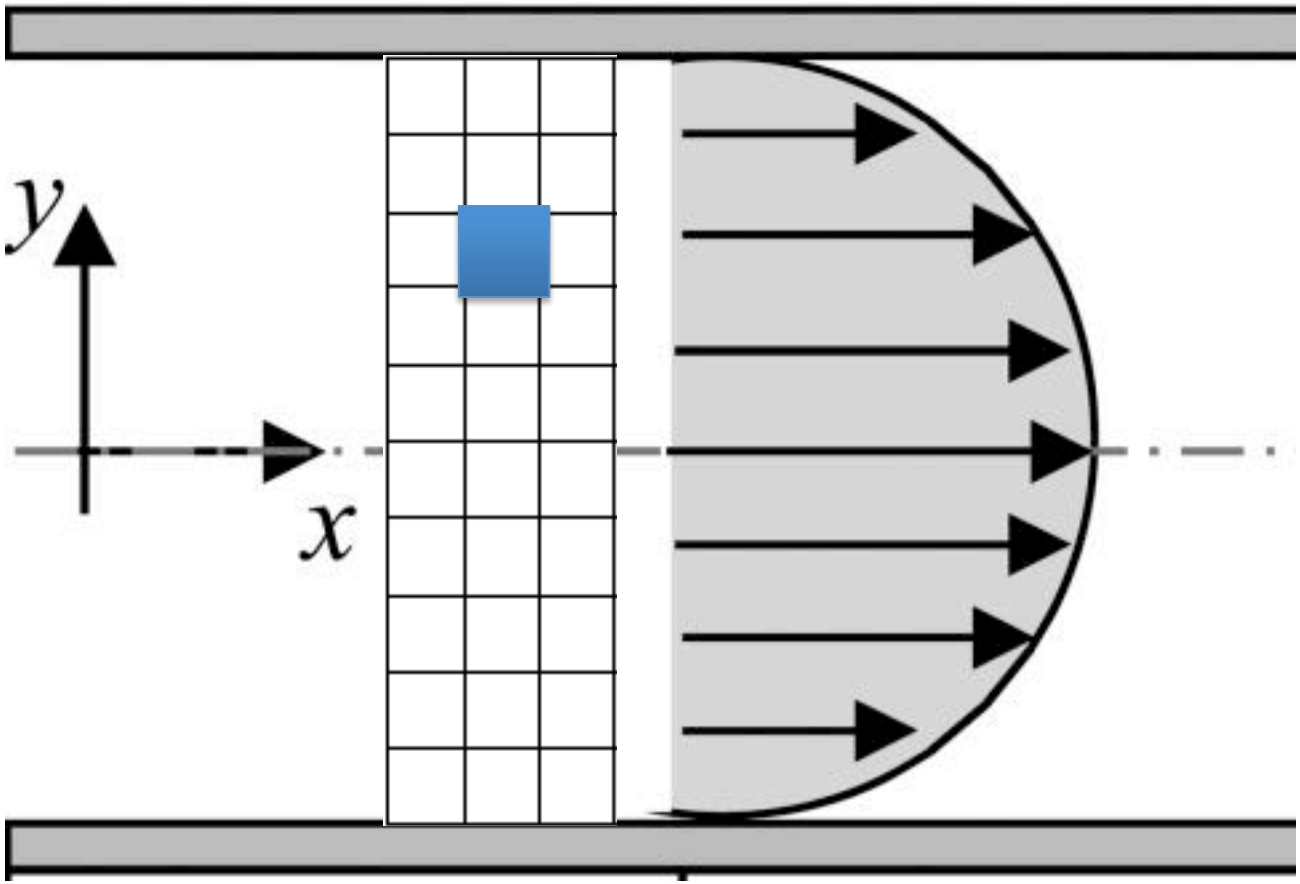
N>>1, *l*<<L



- Мы можем описать среду в данном элементе с помощью:
  - Скорости $\vec{V} = \left(V_x, V_y, V_z\right)$
  - Давления p.
  - Плотности ρ
  - Температуры T.
  - физических свойств

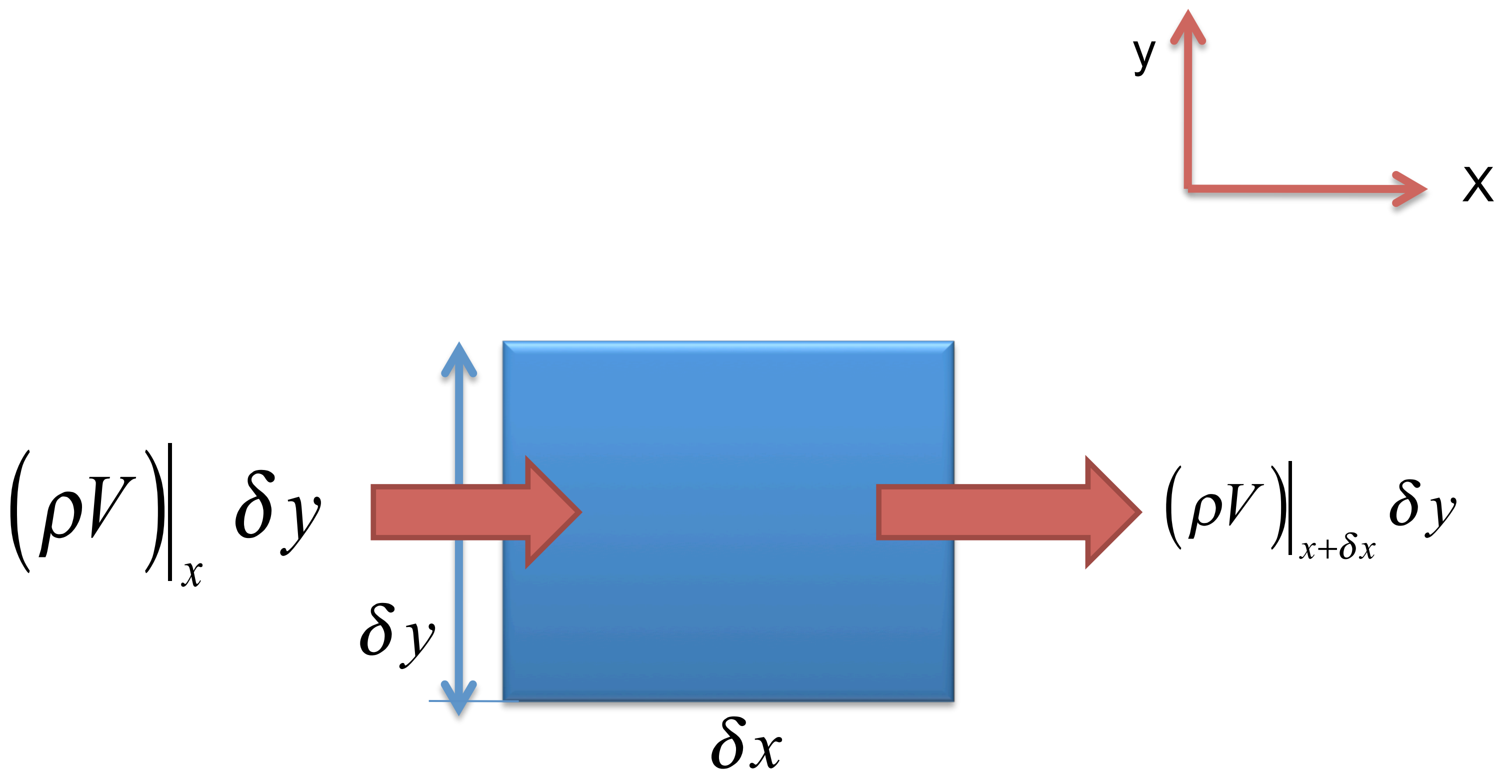


Течение в плоском канале



Закон сохранения массы

- Изменение массы = приток массы извне
- Изменение массы = $\frac{\partial}{\partial t} M = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y) = \delta x \delta y \frac{\partial \rho}{\partial t}$
- Притоки массы к граням:



Запишем закон сохранения массы

$$\delta x \delta y \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho V \Big|_{x+\delta x} - \rho V \Big|_{x} \right) \delta y = 0$$

$$\delta x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho V \Big|_{x} + \frac{\partial \rho V}{\partial x} \delta x - \rho V \Big|_{x} = 0$$

После приведения подобных

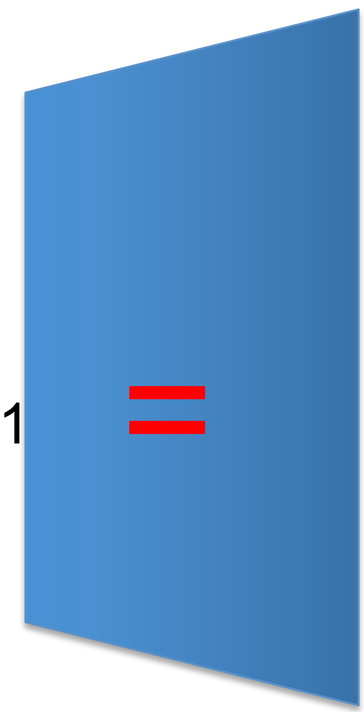
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V)}{\partial x} = 0$$

Канал переменного сечения

+

стационарное течение

$$\boxed{0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (\rho V S)}{\partial x}}$$



$\rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$

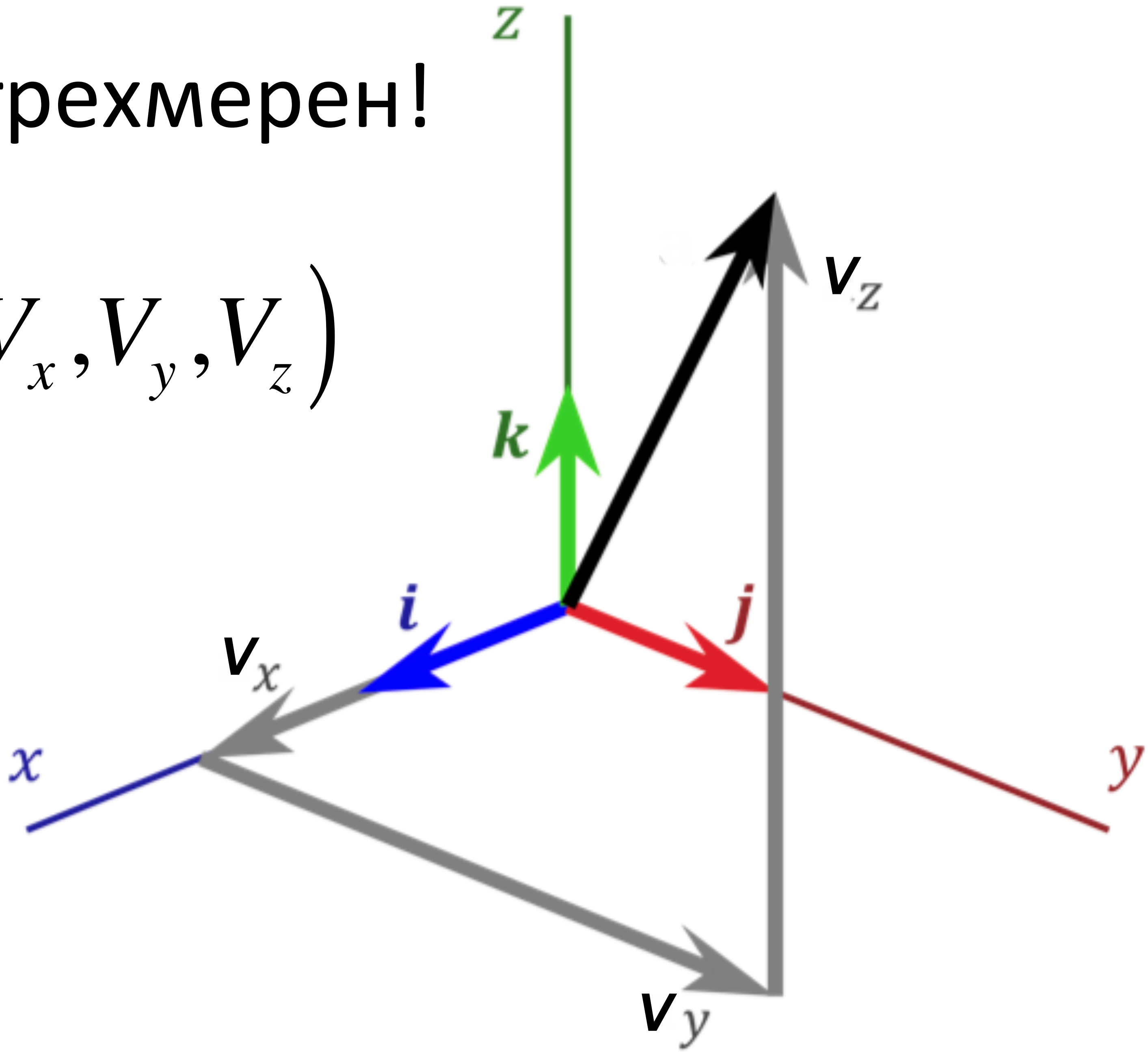
<u>Расход</u>

Массовый: $\rho S V$ кг/с

Объемный: $S V$ м^3/с

Мир трехмерен!

$$\vec{V} = \left(V_x, V_y, V_z\right)$$



В трехмерном случае

- В общем виде по координатам:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}=0$$

- Для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial(V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(V_z)}{\partial z}=0$$

2-й закон Ньютона

Sir Isaac Newton,
25 декабря 1642
20 марта 1727

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{dJ}{dt} = F$$

Ускорение тела пропорционально равнодействующей сил, действующих на него.

Импульс

Произведение массы тела на его скорость:

$$\vec{\mathbf{J}} = m\vec{\mathbf{V}}$$

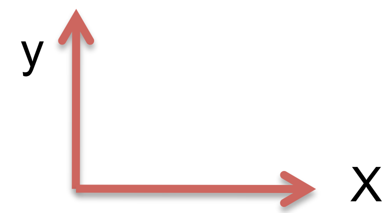
Для частички жидкости:

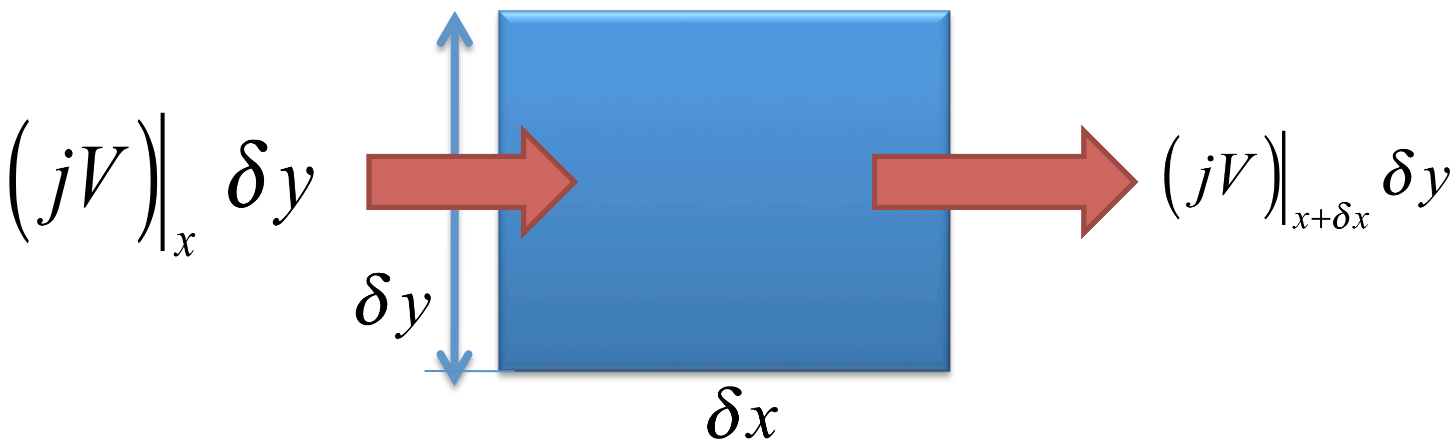
$$\vec{\mathbf{J}} = \rho \underbrace{\delta x \delta y dz}_{\textbf{объем}} \vec{\mathbf{V}}$$

Изменение импульса в элементарном объеме

- Изменение импульса= $\frac{\partial}{\partial t} J = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V \delta x \delta y) = \delta x \delta y \frac{\partial \rho V}{\partial t}$

- Притоки импульса к граням:
- Действие сил





$j = \rho V$

Изменение импульса

$$\delta x \delta y \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \left(jV\big|_{x+\delta x} - jV\big|_{x} \right) \delta y =$$

$$= \delta x \delta y \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \left(\rho V \bullet V\big|_{x} + \frac{\partial \rho V \bullet V}{\partial x} \delta x - \rho V \bullet V\big|_{x} \right) \delta y$$

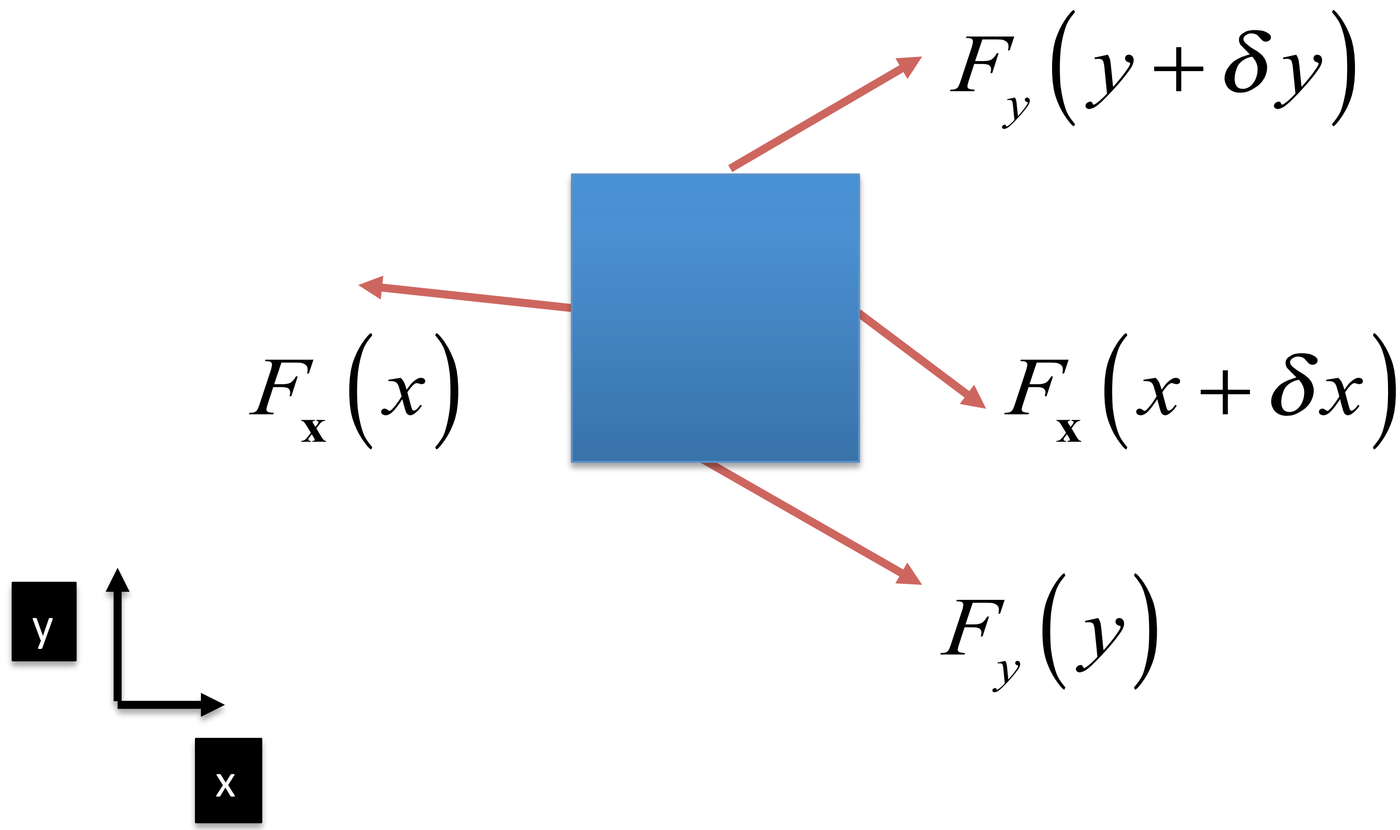
После приведения подобных

$$\delta x \delta y \left(\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho V \bullet V}{\partial x} \right) = \delta x \delta y \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

С учетом закона сохранения массы и формулы дифференцирования произведения: (a*b)'=a'b+b'a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V)}{\partial x} = 0$$

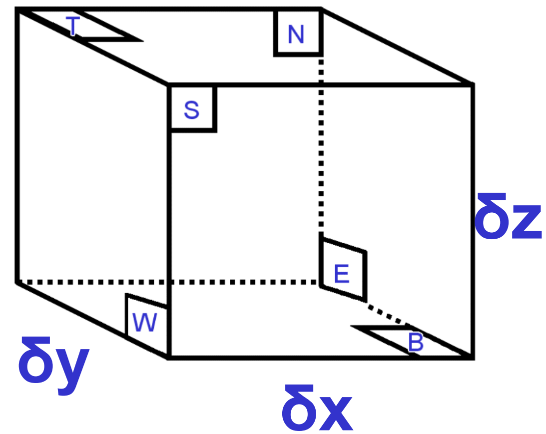
Силы, действующие на элементарный объем со стороны других объемов

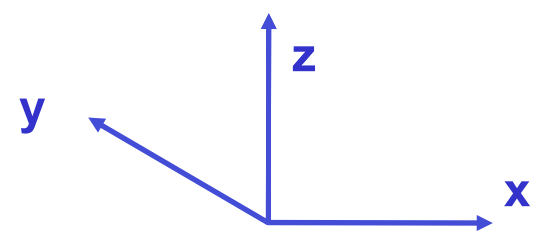


Силы и напряжения

Величина приложенной силы зависит от размера площадки, к которой она приложена.

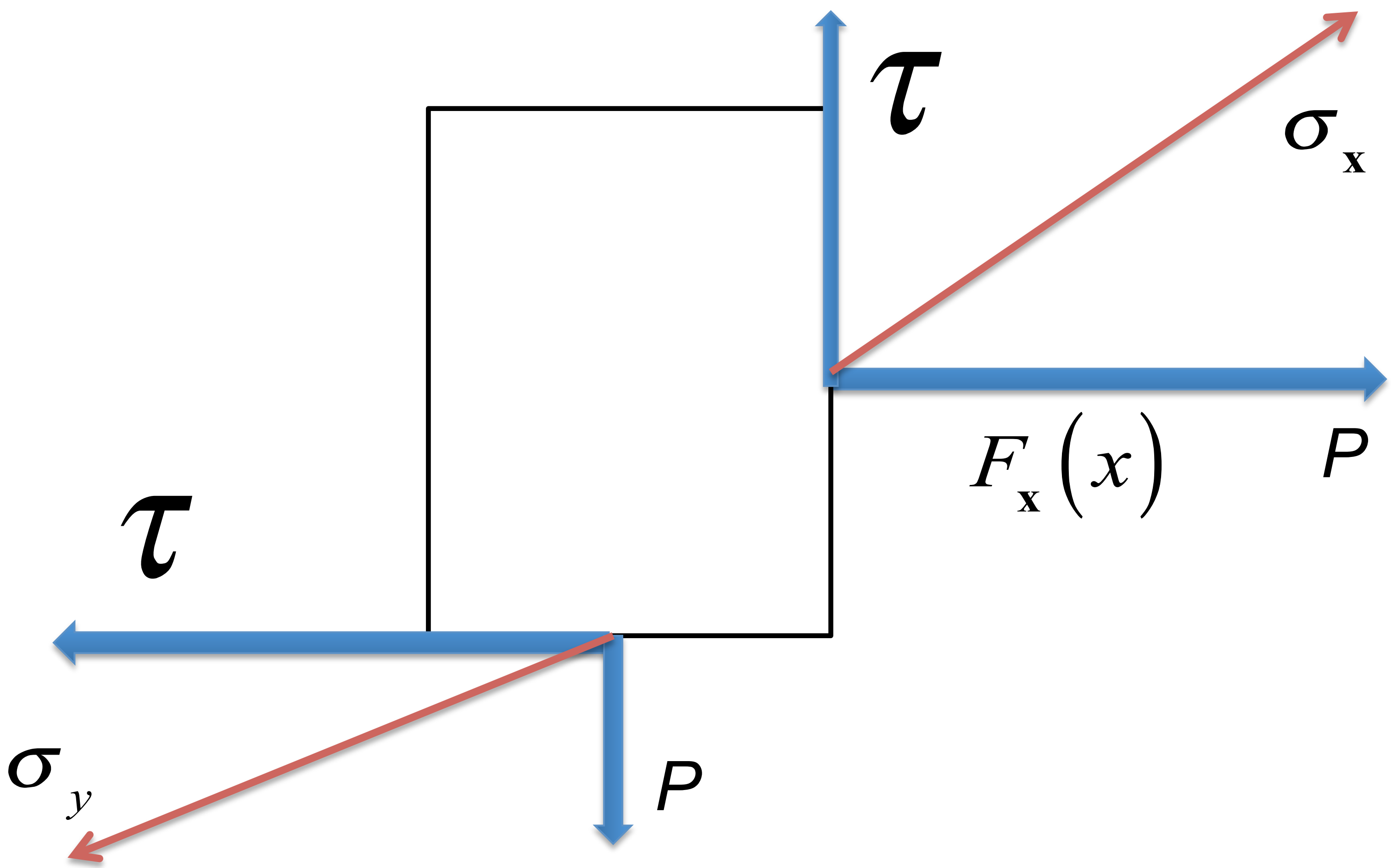
$$\sigma_x = \frac{F_{\mathbf{x}}}{\delta y \delta z}; \sigma_y = \frac{F_y}{\delta x \delta z}; \sigma_z = \frac{F_{\mathbf{x}}}{\delta y \delta x};$$



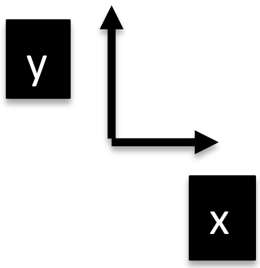


Нам нужны величины, которые не зависят от размера площадки!

Силы, действующие на элементарный объем со стороны других объемов

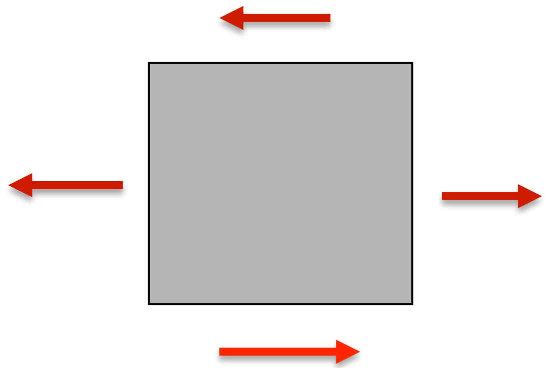


Баланс сил в направлении оси x



$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\delta y\right)\delta x$$

$$P\delta y$$



$$\left(P + \frac{\partial P}{\partial x}\delta x\right)\delta y$$

$$\tau\delta x$$

$$\boxed{\delta x \delta y\left(\frac{\partial P}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \tau}{\partial \mathrm{y}}\right)}$$

2-й закон Ньютона, проекция на ось *x*

$$\delta x \delta y \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \delta x \delta y \left(\frac{\partial P}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \tau}{\partial \mathrm{y}} \right)$$

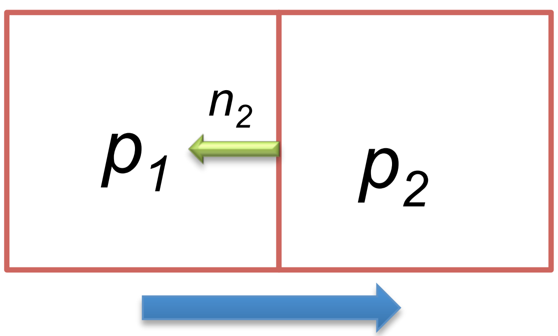
Сократив на объем ячейки:

$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \tau}{\partial \mathrm{y}}$$

Давление

Давление — физическая величина, численно равная силе F, действующей на единицу площади поверхности S перпендикулярно этой поверхности.

$$p = \frac{F_n}{S}$$



$p_1 > p_2$

Сила направлена от 1го ко 2му объему

Сила направлена противоположно нормали n_2

$$\boxed{p = -P}$$

Закон сохранения импульса

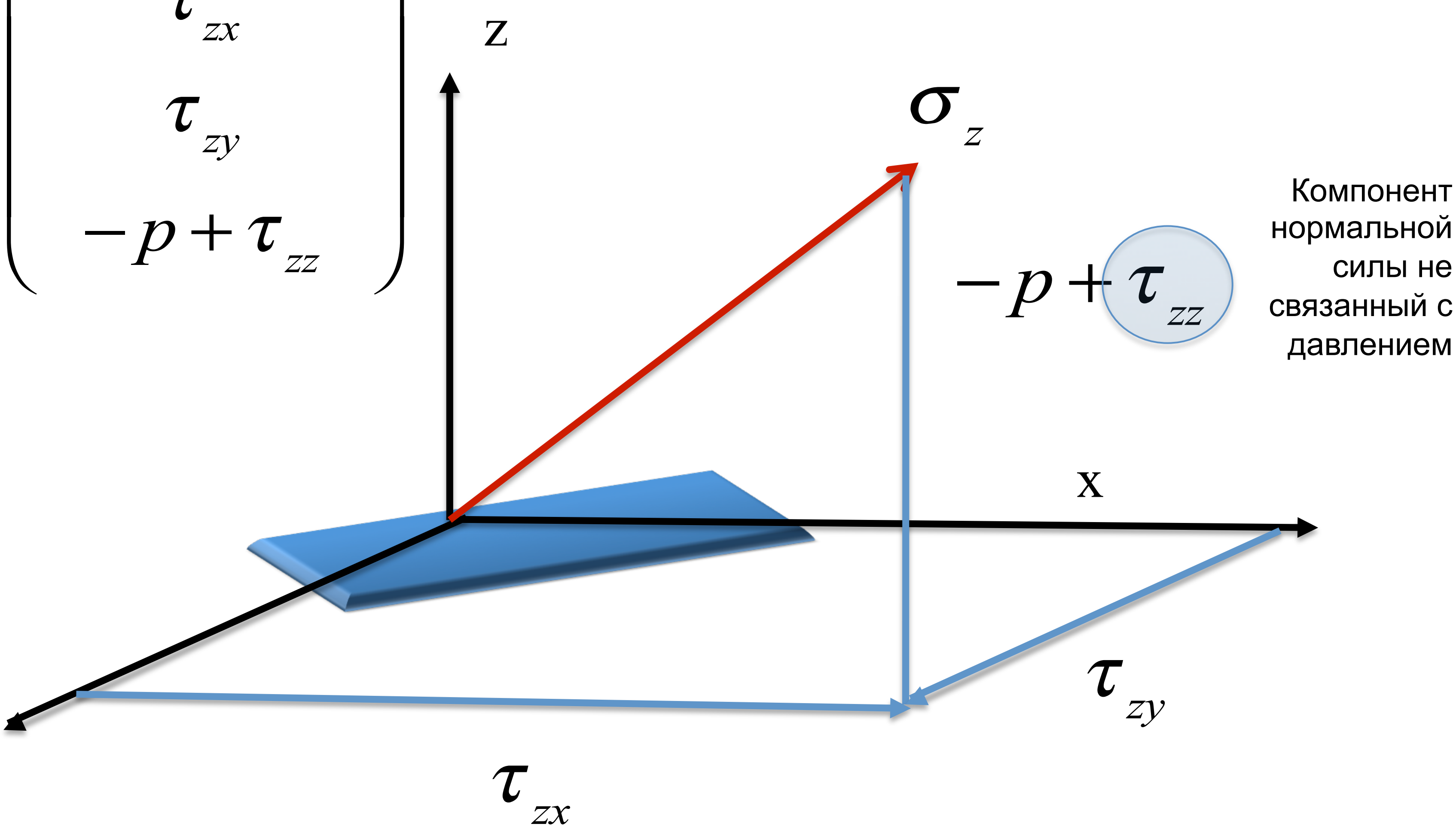
$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \tau}{\partial \mathrm{y}}+F_e$$

Внешняя сила:

- Сила тяжести
- Электромагнитная сила

Вернемся в трехмерный мир

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ -p + \tau_{zz} \end{pmatrix}$$



Уравнения импульса

x-компонента:

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=\frac{\partial\left(-p+\tau_{xx}\right)}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \tau_{\mathrm{yx}}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \tau_{\mathrm{zx}}}{\partial \mathrm{x}}+F_x$$

y-компонента:

$$\rho\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\left(-p+\tau_{yy}\right)}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+F_y$$

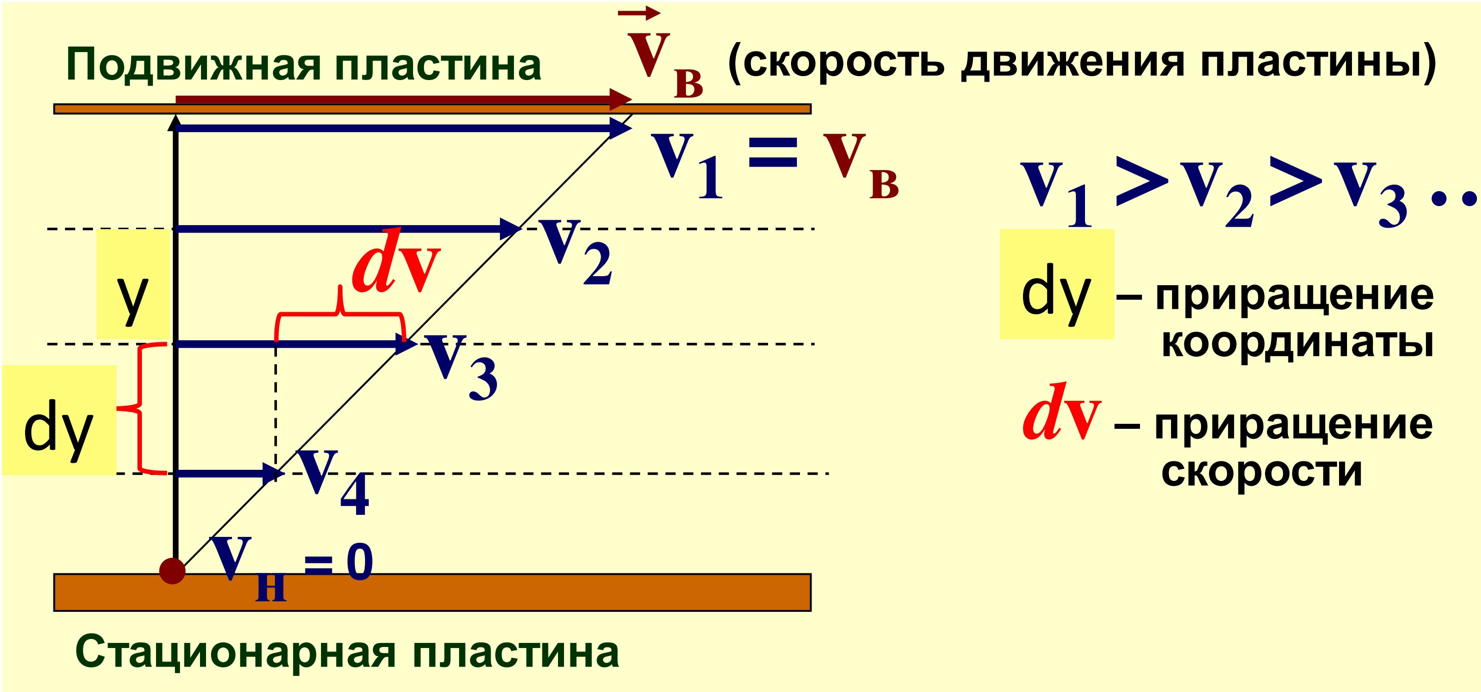
z-компонента:

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\left(-p+\tau_{zz}\right)}{\partial z}+F_z$$

Реологические соотношения

- Предыдущие уравнения не замкнуты. Они содержат плотность, скорость (3 компоненты) и напряжения (9 компонент)
- Надо выразить напряжения через скорости или что-нибудь еще.

Вязкая жидкость. Опыт Ньютона



$$\tau = \frac{F}{A} \sim \frac{dV}{dy}$$

Касательное напряжение на стенке пропорционально скорости сдвига

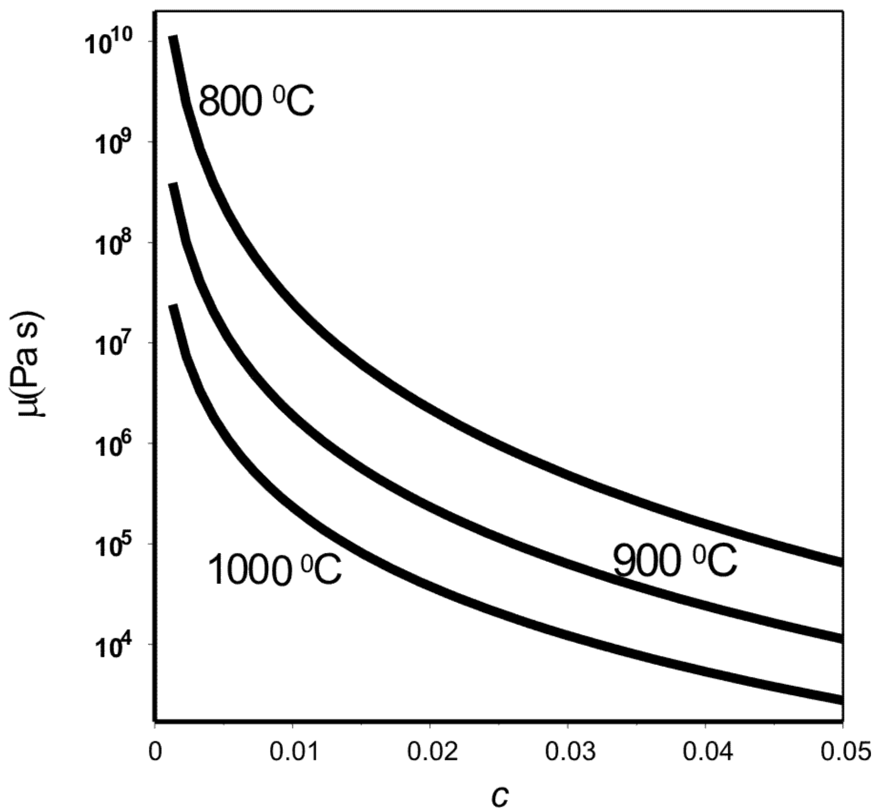
$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

μ – вязкость, коэффициент пропорциональности

Вязкая жидкость прилипает к стенкам!

Вязкость магмы (расплава)

Hess K-U, Dingwell DB (1996) Viscosities of hydrous leucogranitic melts: a non-Arrhenian model. Am Mineral 81:1297–1300



Сильная зависимость вязкости расплава от температуры и концентрации растворенной воды.

Пар = 10^{-5}
Вода = 10^{-3}
Мёд = 10 Pa c
Битум 10^{2}

Связь между напряжениями и изменением скорости = деформацией

При одномерном движении: $$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

В общем случае:

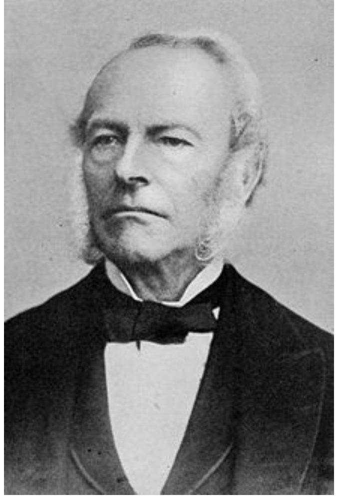
(сдвиговое напряжение) = (вязкость)x(скорость деформации)

- В декартовых координатах, в трехмерном случае:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$



Sir George Gabriel Stokes

Уравнения Навье -Стокса (1822)

$1,000,000 за доказательство существования и единственности решения

Claude Louis Marie Henri Navier

x-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)+F_x$$

y-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)+F_y$$

z-component :

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)+F_z$$

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА МОЖНО РЕШИТЬ!

ИНОГДА☹

Гидростатика: давление

Blaise Pascal

Паскаль вставил в закрытую бочку, наполненную водой, трубку площадью 1 см^2, длиной 5 м и, поднявшись на балкон второго этажа дома, вылил в эту трубку кружку воды. Когда вода в ней поднялась до высоты ~ 4 метра, давление воды увеличилось настолько, что в крепкой дубовой бочке образовались щели, через которые потекла вода.

Решим уравнения Навье-Стокса

Гидростатика:

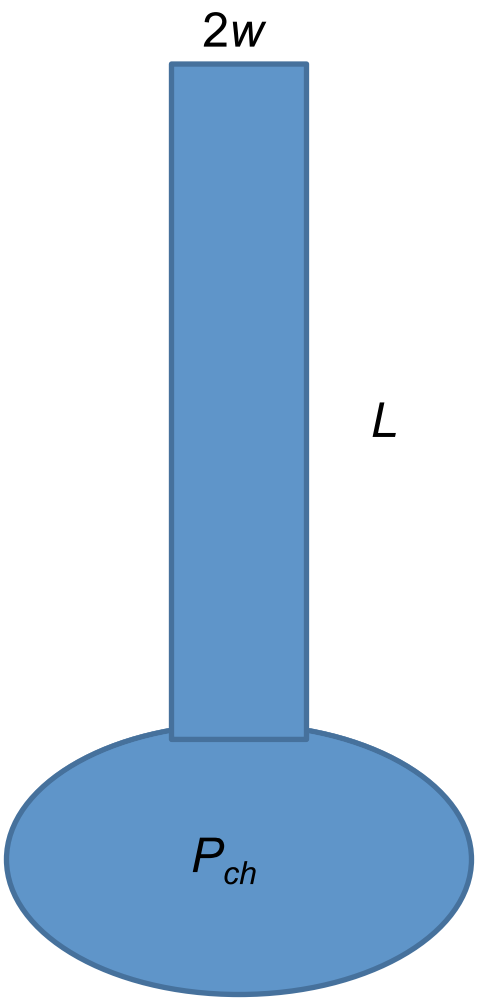
$$\vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \Rightarrow p = p_a + \rho g z$$

Сила=
Давление х Площадь

Наша 1-я модель вулканического извержения.



- Чтобы понять опасен ли вулкан надо посчитать возможный расход магмы!
- Пусть в очаге скопилась магма с давлением P_{ch}
- Канал вулкана – щель толщины $2w$, ширины h и длины L.
- Вязкость магмы постоянна.
- Плотность магмы тоже постоянна

Течение несжимаемой магмы в плоской дайке

Течение стационарно (не зависит от времени)

Жидкость несжимаемая

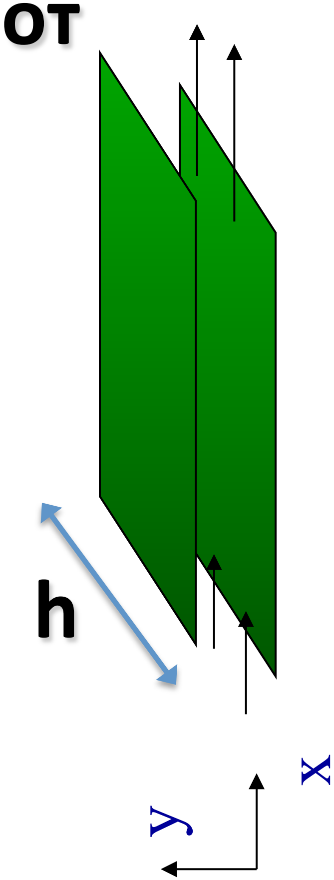
$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

V_y=V_z=0

Сила тяжести отсутствует

(ее можно учесть, если вместо

давления ввести $p^* = p - \rho g x$)



Из закона сохранения массы

$$\frac{\partial(V_x)}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial(V_y)}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial(V_z)}{\partial z}}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}V_x(x,y)=0 \quad\Rightarrow\quad V_x=V_x(y)$$

Уравнения импульсов

x-component :

$$\rho\cancel{\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}}+\boxed{\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}}\right)+\cancel{\rho g_x}$$

y-component :

$$\rho\cancel{\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\cancel{\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)}+\rho g_y$$

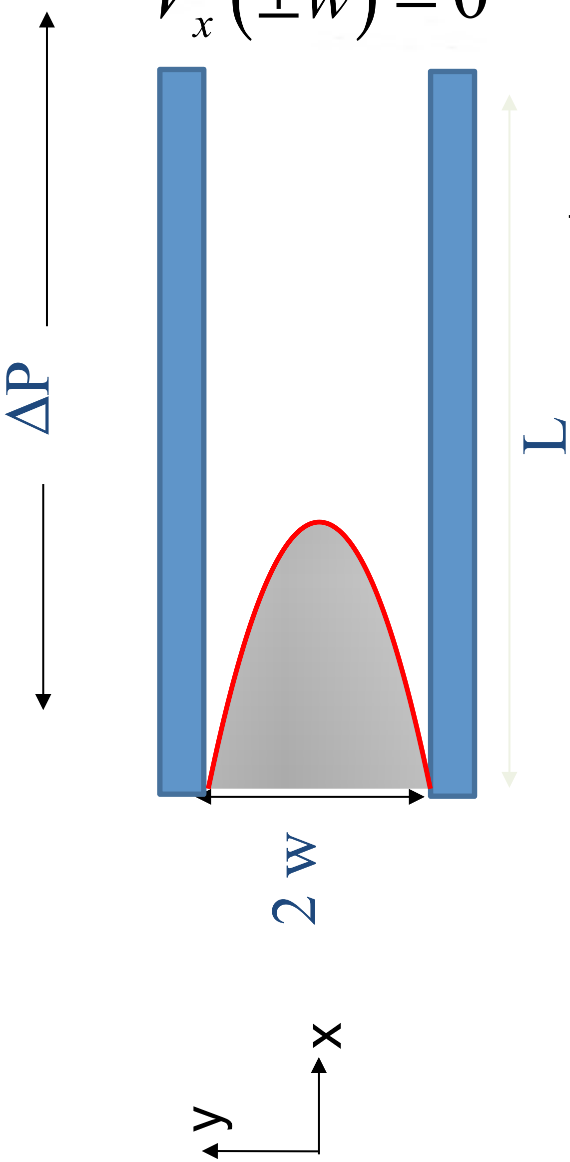
z-component :

$$\rho\cancel{\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_z}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_z}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\cancel{\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)}+\rho g_z$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial z}=0\Rightarrow p=p(x)}$$

Профиль скорости

$$V_x(\pm w) = 0$$



$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{d}{dx}p = \mu \frac{d^2 V_x}{dy^2} = const$$

$$\Downarrow$$

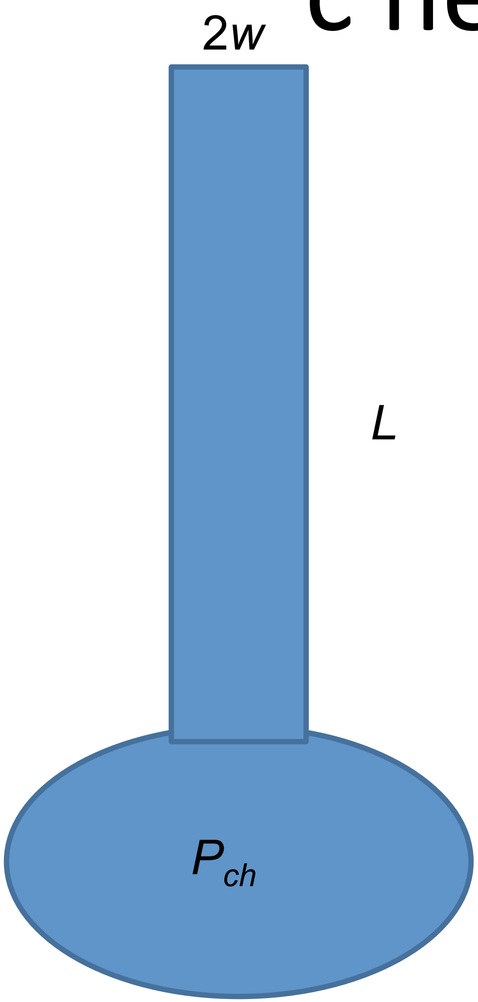
$$V = a + by + cy^2$$

$$\Updownarrow$$

$$V_x = V_{\max}\left(1 - \left(\frac{y}{w}\right)^2\right)$$

Jean-Louis Marie Poiseuille (1799-1869)

Связь расхода с перепадом давления



$$Q = -\frac{2w^3 h}{3\mu}\frac{\Delta P}{L}$$

Пример

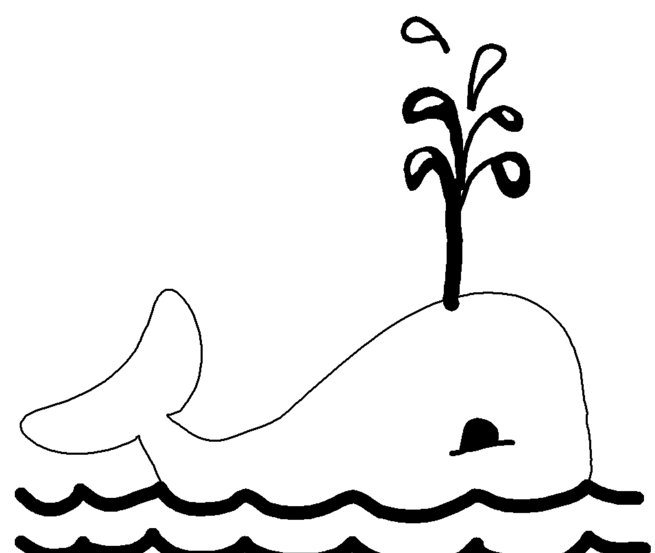
Щелевой канал *w* = 5 м, *h* =200 м, *L*=5000 м, ΔP =10 МПа, μ =10^5 Па с, Q-?

$$Q = \frac{2w^3h}{3\mu}\frac{\Delta P}{L} = 333m^3/s$$

= 2.22 китов/сек

Объем кита:

$$V_w = \frac{M_w}{\rho_w} \approx \frac{150\times10^3 kg}{10^3 kg/m^3} = 150\ \ m^3$$

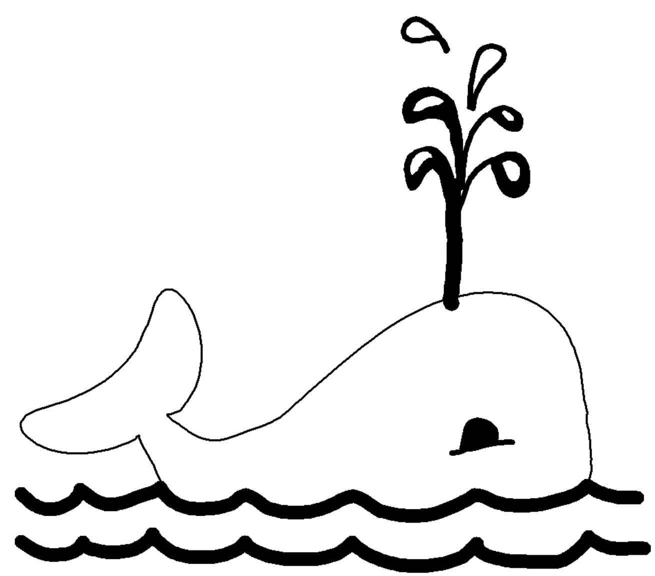


Пример

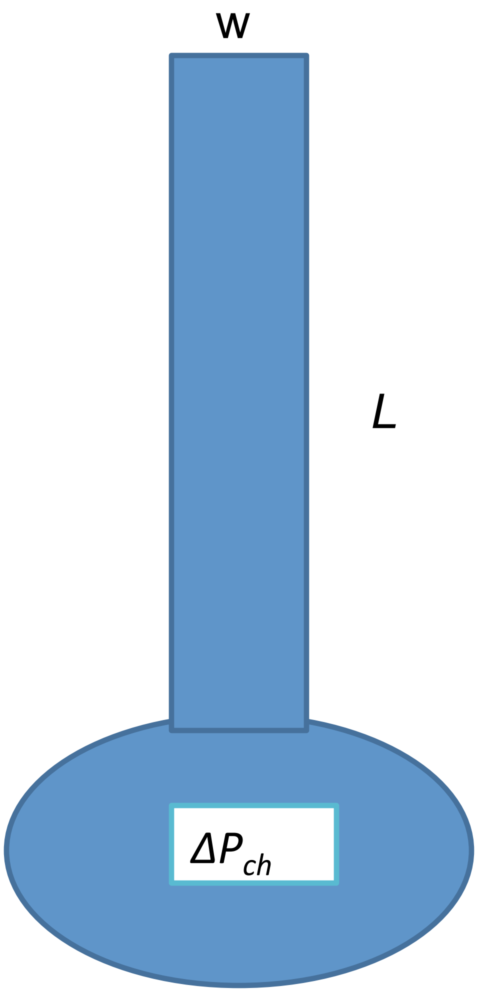
- **Цилиндрический канал *D* = 35.6 м, *L*=5000 м, ΔP =10 МПа, μ =10^5 Па с, Q-?**

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu}\frac{\Delta P}{L} = 788\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

= 5,25 китов/сек



Наша 2-я модель вулканического извержения.



- Пусть в очаге скопилась магма с избыточным давлением $P_1 = P_0 + \Delta P$
- Канал вулкана – щель с размерами *w* x *h* и длины *L*.
- Вязкость магмы постоянна.
- Плотность магмы тоже постоянна
- Очаг находится в упругих породах

$$P_1 - P_0 = \beta\left(V_1 - V_0\right)$$

$$\Delta P = \beta \Delta V$$

Соберем воедино!

$$Q(t) = \frac{2w^3 h}{3\mu} \frac{\Delta P(t)}{L}$$

$$\Delta \mathrm{P}(t) = \beta \, \Delta \mathrm{V}(t)$$

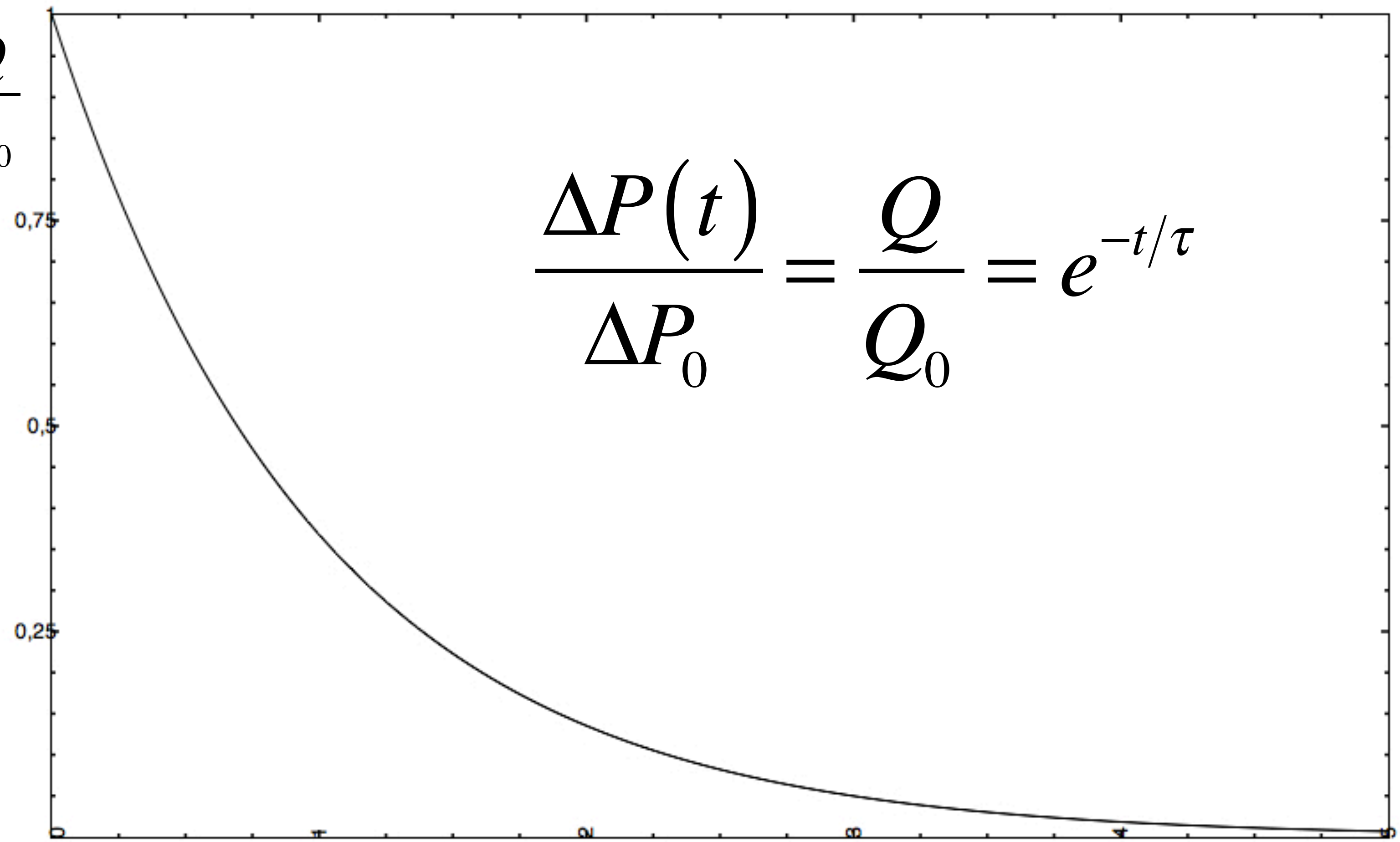
$$\frac{d\Delta \mathrm{P}(t)}{dt} = \beta \frac{d\Delta \mathrm{V}(t)}{dt} = -\beta Q(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\Delta \mathrm{P}(t)}{dt}} = -\beta \frac{2w^3 h}{3\mu} \frac{\Delta P(t)}{L} = \boxed{-\frac{1}{\tau} \Delta P(t)}$$

Решение уравнения

$$\frac{\Delta P}{\Delta P_0} = \frac{Q}{Q_0}$$



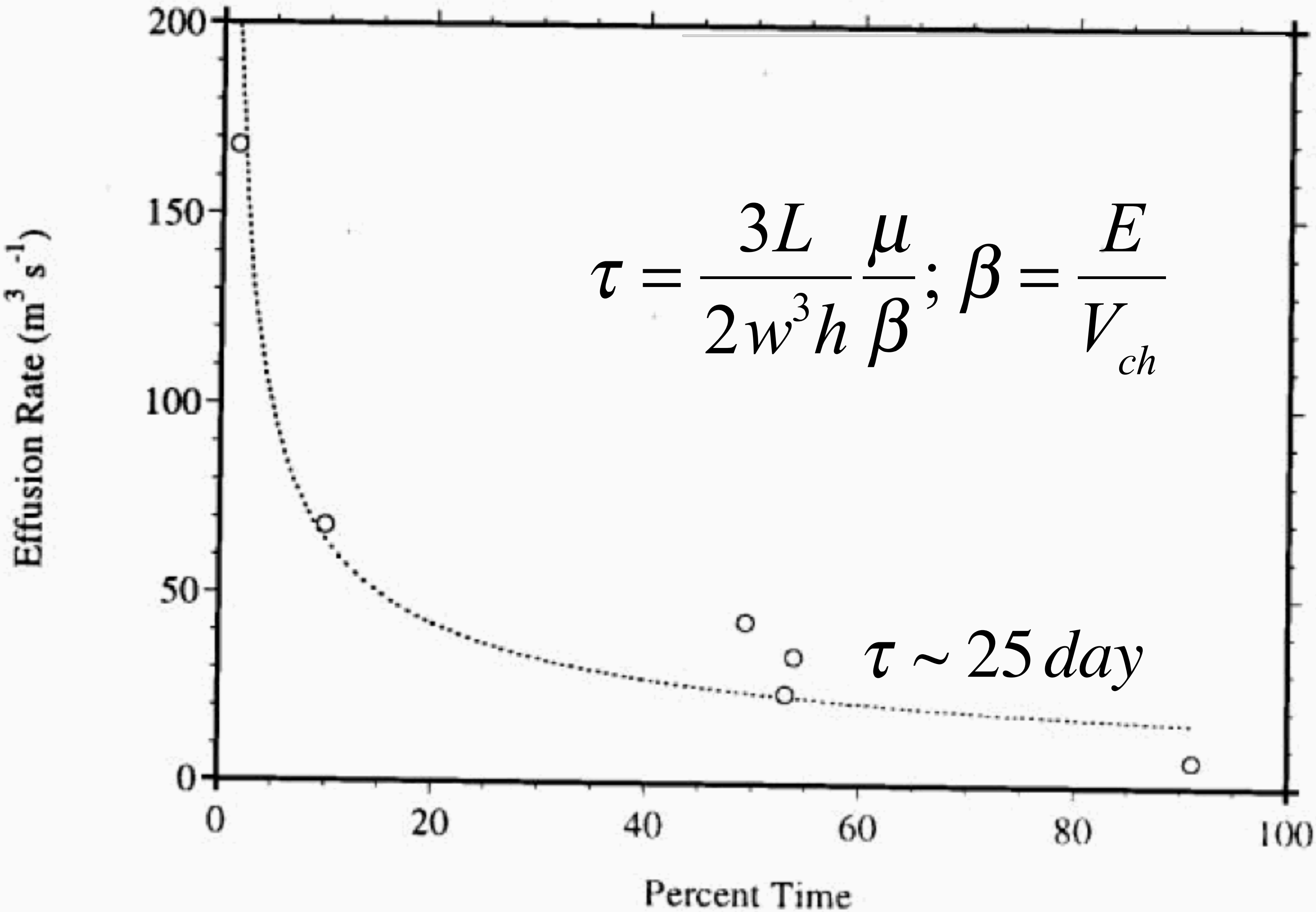
$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta P_0} = \frac{Q}{Q_0} = e^{-t/\tau}$$

$$t/\tau$$

Вулкан Крафла, Исландия



Моделирование вулкана Крафла



$$\tau = \frac{3L}{2w^3h}\frac{\mu}{\beta};\ \beta = \frac{E}{V_{ch}}$$

$$\tau \sim 25\,day$$

Какой же размер очага для вулкана Крафла?

$E = 10^9$ Па, другие параметры как в нашей предыдущей модели.

Результат представить в $км^3$ и в китах

Итак:

- Вывели страшные уравнения, которые описывают движение жидкости.
- Ввели понятие вязкости.
- Нашли простые и полезные решения страшных уравнений.
- Построили простую модель извержения, которая позволяет оценить параметры вулканической системы по данным наблюдения.
- Узнаем, что не все так просто ☹