

Магма как гетерогенная среда .

- **Физические свойства магм в зависимости от фазового состояния. Режимы течения многофазных сред (гомогенный, пузырьковый, снарядный, дисперсный, пленочный) и их связь с типами извержений.**
- **Основные уравнения механики сплошной среды (уравнения неразрывности и сохранения импульса).**
- **Введение в реологию магмы.**

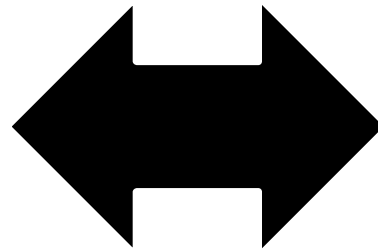
МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ

ТЕЛ 939-5476, EMAIL: MELNIK@IMEC.MSU.RU

Продукты извержений



Лава < 10%



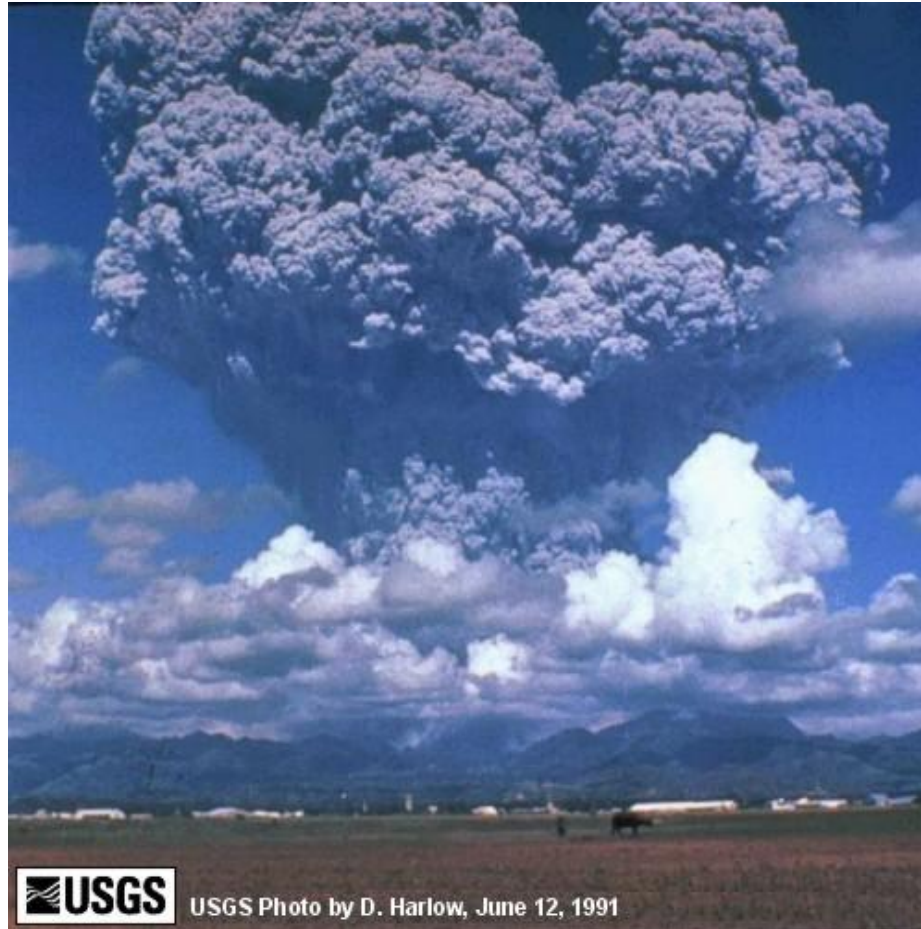
Пемза > 50%

пузырей

Типы вулканических извержений

Эксплозивные

На поверхность выходит струя газа с частицами магмы



Экструзивные/Эффузивные

Лава с пузырьками газа



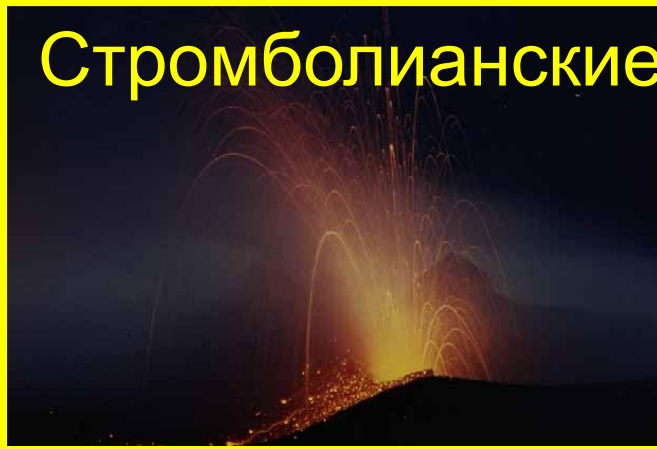






Эксплозивные извержения

Стромболианские



Короткоживущие 1-2 мин взрывы, вызванные подъемом газового пузыря к жерлу вулкана, высота выброса до нескольких сотен метров

Вулканские



Более продолжительные (до 10-20 мин), характерны для более вязкой магмы, высота выброса до 10 км. Часто приводят к пирокластическим потокам

Плинианские



Мощные, продолжительные (до часов и дней). Высота колонны до 50 км. Приводят к разрушительным последствиям.



Экструзивные извержения

- Лавовые потоки
(гавайский тип)

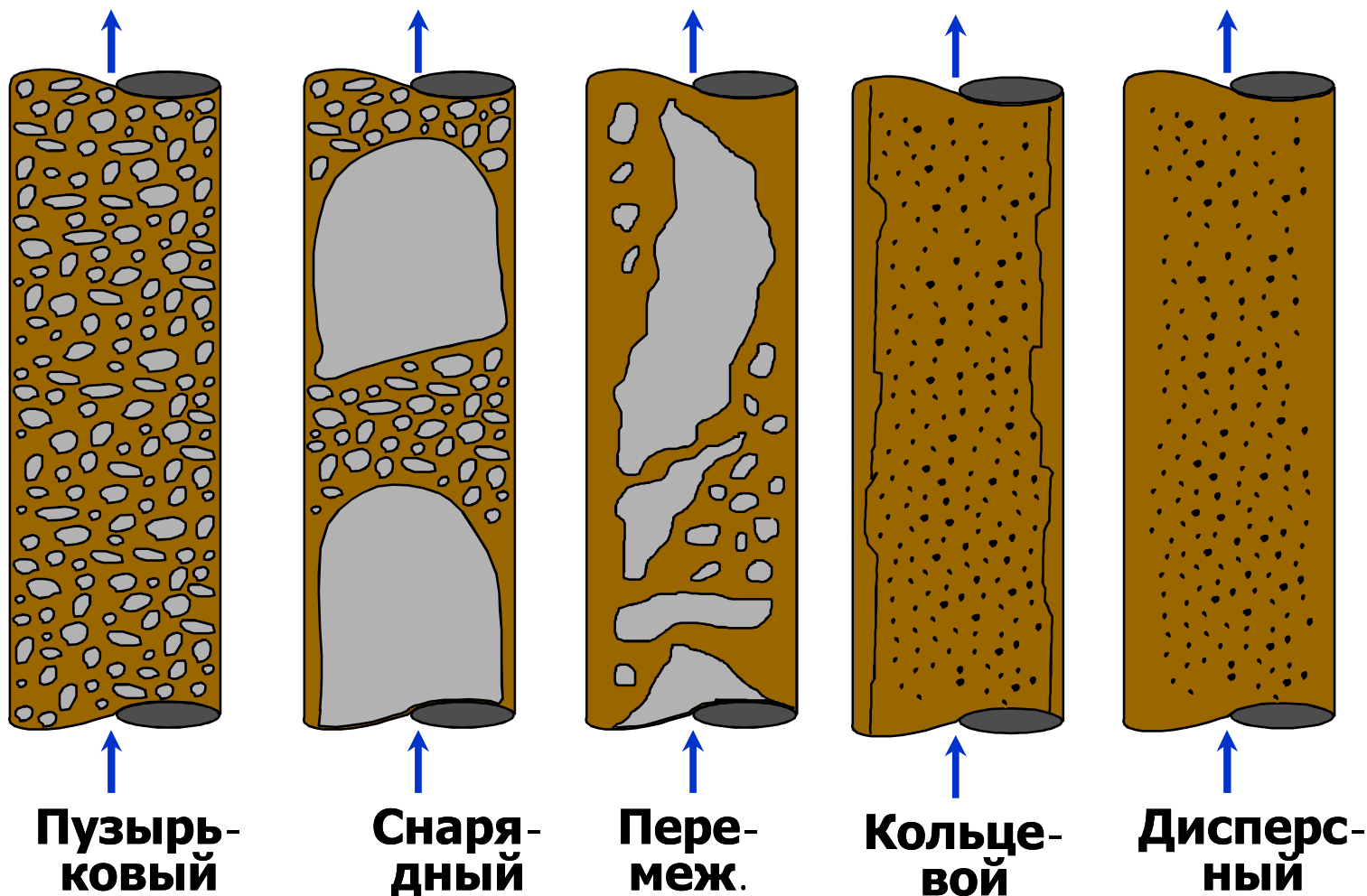


- Лавовые купола
(пелейский тип)

Летучие – движущая сила извержений

- При больших давлениях различные газы растворены в магме (H_2O , CO_2 , HCl и др.)
- Магма может содержать до 10 весовых процентов растворенных газов.
- При подъеме и падении давления происходит нуклеация пузырьков и их последующий рост.
- При взрывных извержениях происходит дробление магмы и вынос ее на поверхность газом.

Режимы течения газожидкостных сред



Изменение структуры потока по мере роста доли газа

Видео отдельных режимов



1



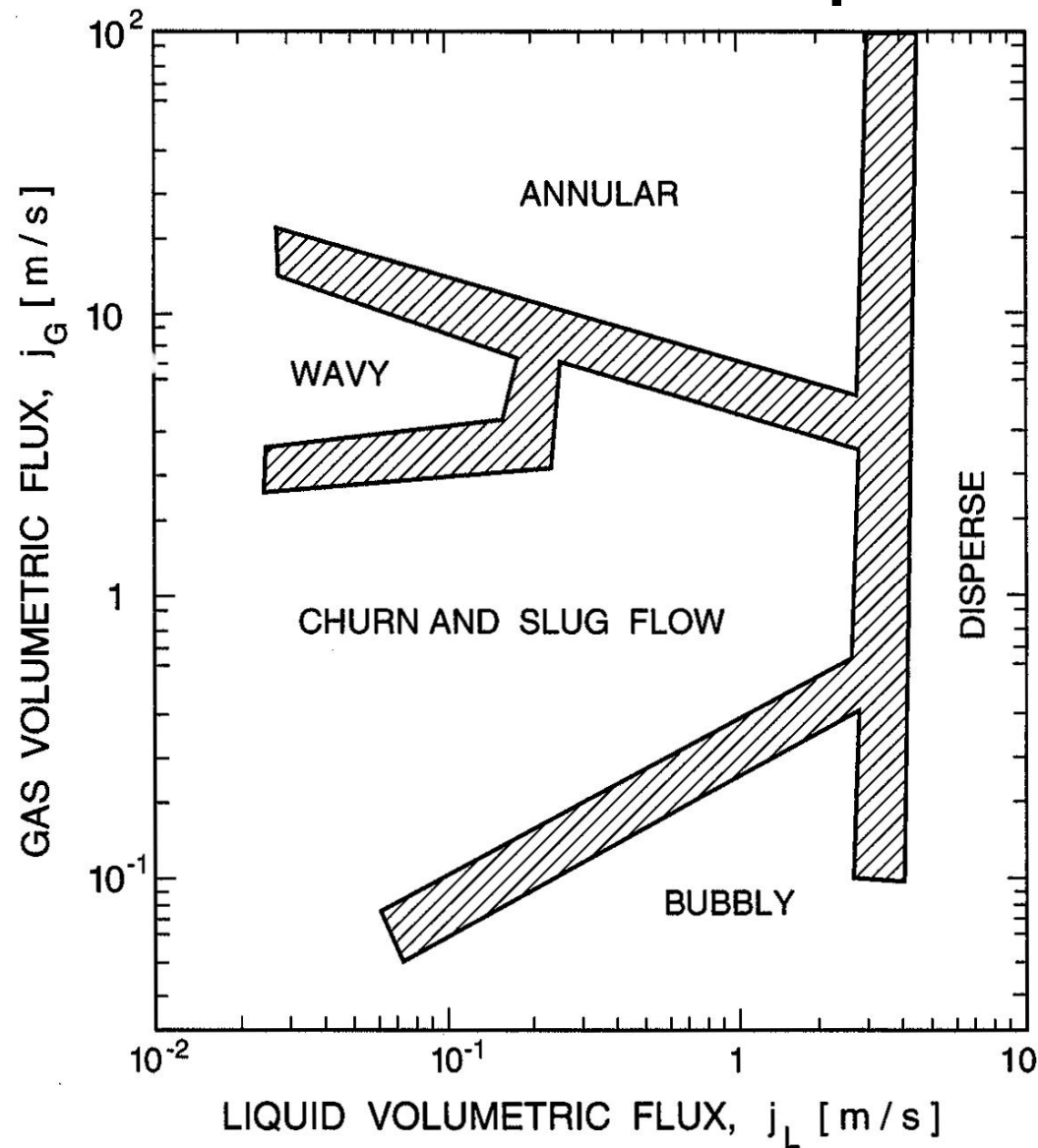
2



3

1. Пузырьковый
2. Кластерный
3. Снарядный

От чего зависит режим течения?



- Объемной доли газа
- Вязкости жидкости
- Скорости потока
- Геометрии канала
- Способа диспергирования
- ...

На это осях отложены приведенные объемные потоки фаз.

Вулканические извержения как многофазные течения

Тип извержения	Режим течения
Гавайский Пелейский	Пузырьковый Кластерный
Стромболианский	Снарядный
Вулканский Плинианский	Дисперсный

НАБЛЮДЕНИЯ
расход магмы
сейсмические сигналы
деформации поверхности
температура
высота колонны

ЛАБОРАТОРНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ
плотность
вязкость
термодинамические свойства
Структура

ПЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ
условия подъема магмы
начальный состав
кинетические процессы

↑ ↑ ↑
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

↓
ПРОГНОЗ

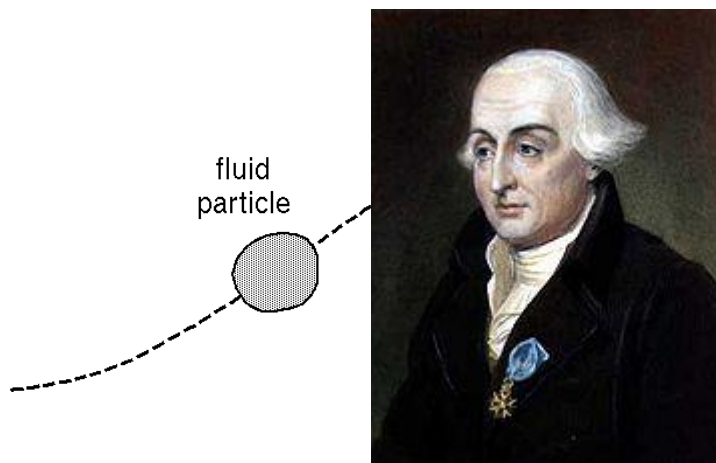
Уравнения механики сплошной среды

Законы сохранения массы и
импульса

Лагранжев

Joseph Louis Lagrange, [1736-1813](#)

- Поток среды может быть представлен в виде потока жидких частиц, для которых определены масса, импульс, энергия и начальное положение. Законы движения записываются для каждой частицы и смотрятся за ее эволюцией во времени.

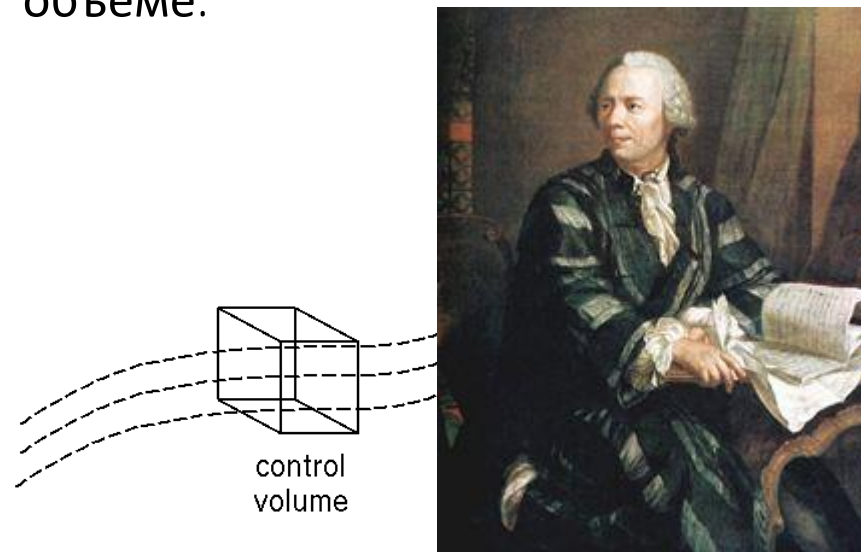


и Эйлеров

Leonhard Euler; [1707](#) -, [1783](#),

ПОДХОД

Мы фиксируем элементарный объем сплошной среды с координатами (x, y, z) и выписываем уравнения для изменения массы, импульса и энергии в этом элементарном объеме.



Данные подходы приводят к одинаковым полям течения, удобство каждого зависит от постановки задачи.

Ряд Тейлора

- Пусть имеется бесконечное количество раз дифференцируемая функция $F(x)$
- И мы знаем ее значение в точке x_0
- Тогда:

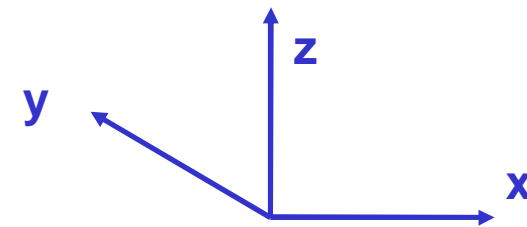
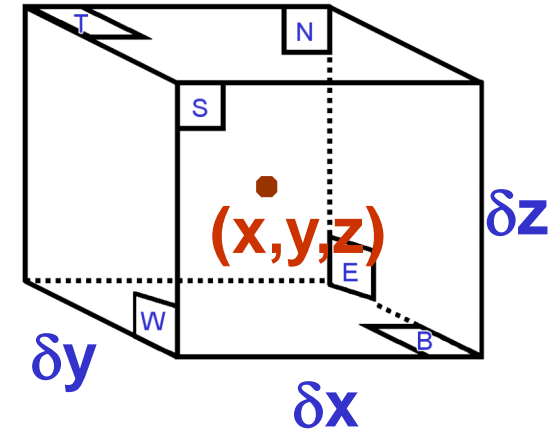
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$



Brook Taylor, [1685](#)—[1731](#)

Свойства элементарного объема

- Мы можем описать жидкость в данном элементе с помощью:
 - Скорости u .
 - Давления p .
 - Плотности ρ .
 - Температуры T .
 - физических свойств μ, C_p, λ

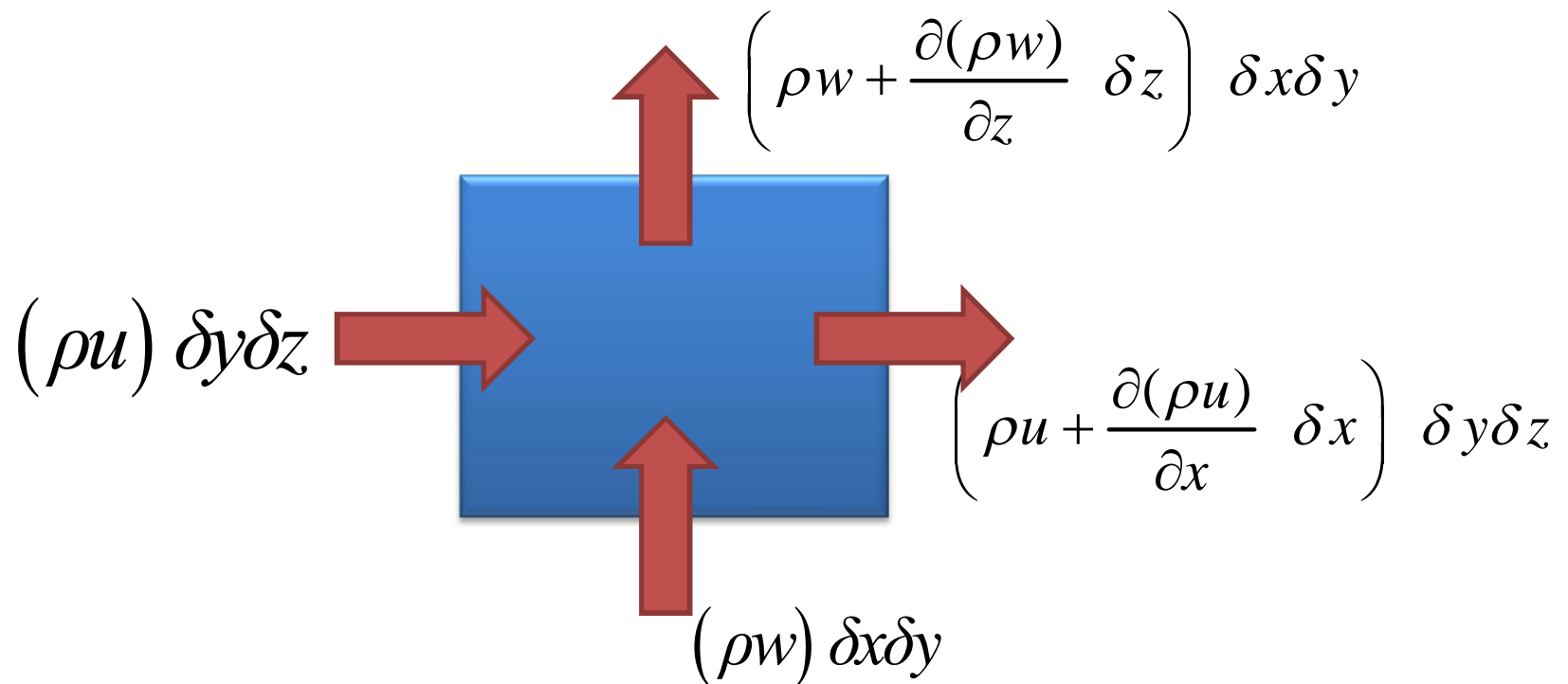


Чтобы определить значения на гранях объема, разложим в ряд Тейлора

$$p: p_W = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \quad \text{and} \quad p_E = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x$$

Закон сохранения массы

- Изменение массы = приток массы извне
- Изменение массы = $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta x\delta y\delta z) = \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta x\delta y\delta z$
- Притоки массы к граням определим по значениям на границах ячеек:



Уравнение неразрывности

- Просуммируем потоки и разделим на $\delta x \delta y \delta z$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- Векторный вид: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$

- Для несжимаемой жидкости

$$\partial \rho / \partial t = 0 \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

- Или в компонентном виде: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

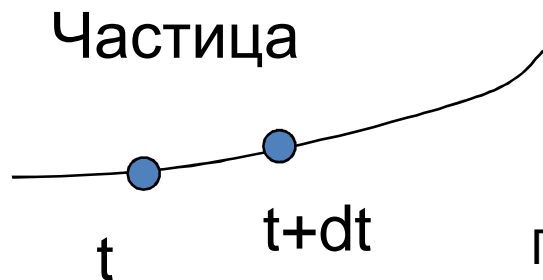
2 закон Ньютона



$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}$$

Ускорение тела пропорционально равнодействующей сил, действующих на него.

Ускорение жидкой частицы



Пусть в момент t поле скоростей имеет вид:

$$\vec{V}_{P@time\ t} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

После перемещения частицы скорость в той точке, где она оказалась:

$$\vec{V}_{P@time\ t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

Тогда ускорение частицы (изменение ее скорости) происходит как за счет изменения поля скоростей, так и за счет перемещения в другое место.

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \frac{d\vec{V}_P}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_P}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_P}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_P}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}. \quad \text{где } u = \frac{dx_P}{dt}, \quad v = \frac{dy_P}{dt}, \quad w = \frac{dz_P}{dt} \end{aligned}$$

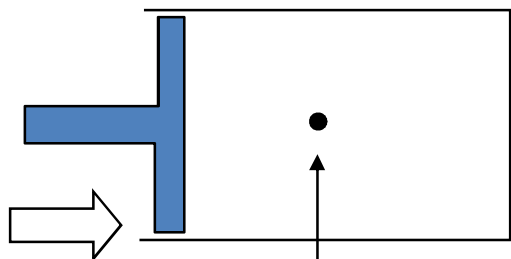
Физическая интерпретация

$$\vec{a}_p = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + u \frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}$$

Полное ускорение

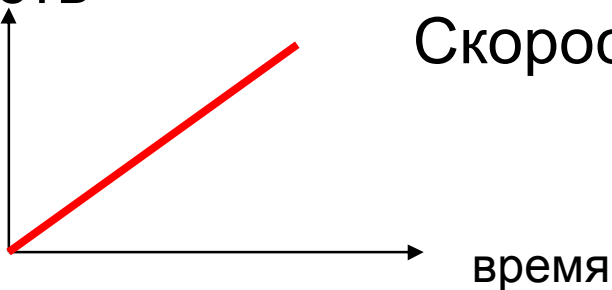
Локальное ускорение

Конвективное ускорение

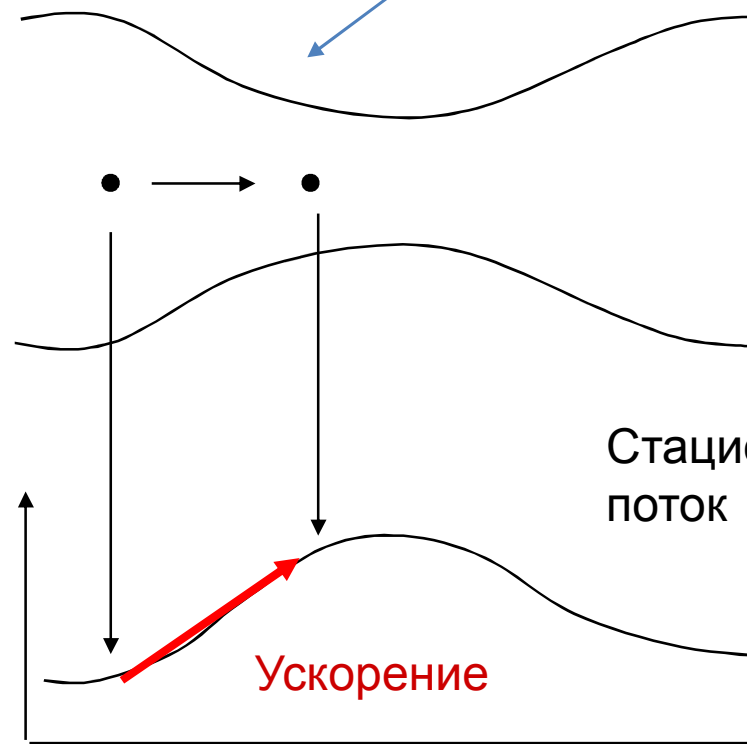


Нестационарный поток

Скорость



Скорость



Стационарный поток

Ускорение

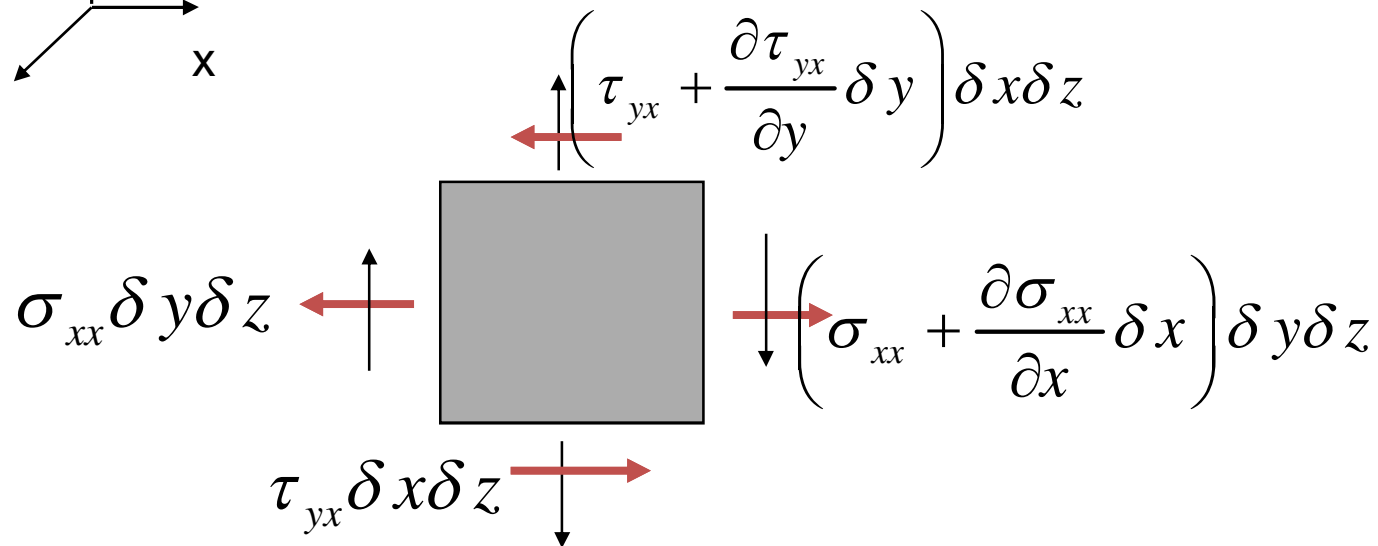
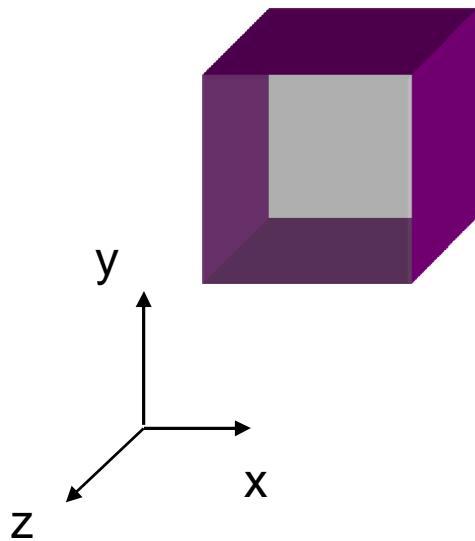
x

Сохранение импульса

Рассмотрим маленький объем жидкости с размерами $\delta x \delta y \delta z$

Под действием сил он испытывает ускорение

$$m \frac{D\vec{V}}{DT} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) \{ \delta x \delta y \delta z \}$$



Баланс сил

В направлении оси x:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \rho g_x \delta x \delta y \delta z$$

Нормальное
напряжение

Сдвиговое напряжение (τ_{zx} :
напряжение, действующее на
площадку, перпендикулярную оси
z в направлении x)

Объемная сила

Тогда из 2 закона Ньютона:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \rho g_x = \rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)$$

Уравнения движения

∴ **x-component of momentum equation:**

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

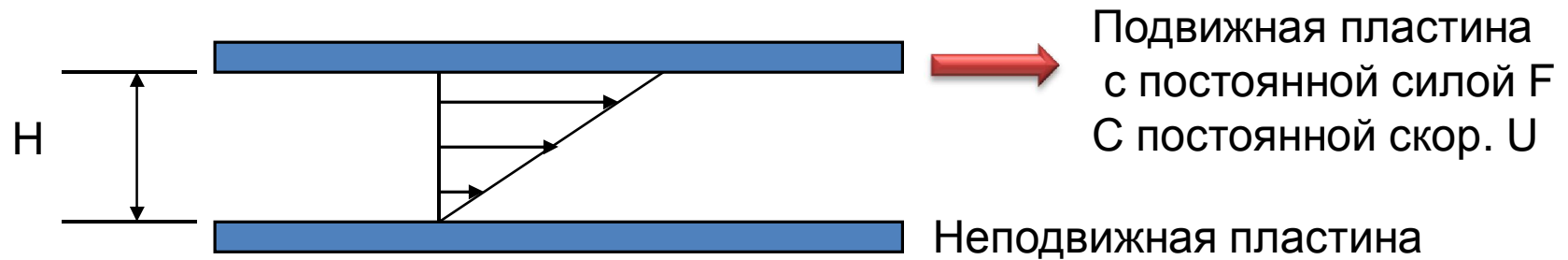
∴ **y-component of momentum equation:**

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y$$

∴ **z-component of momentum equation:**

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

Вязкая жидкость



Из эксперимента , $F \propto A(U/H)=A(dV/dy)$

$$\tau = \frac{F}{A} \propto \frac{dV}{dy} \text{ сдвиговое напряжение}$$

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}, \mu - \text{ВЯЗКОСТЬ}$$

Связь между напряжениями и деформациями

При одномерном движении:

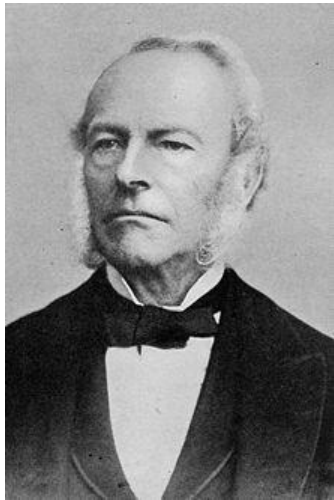
$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

В общем случае:

(сдвиговое напряжение) = (вязкость) × (скорость деформации)

➤ В декартовых координатах, в трехмерном случае:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x} & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y} & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} & \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)\end{aligned}$$



Sir George Gabriel
Stokes

Уравнения Навье -Стокса (1822)

\$1,000,000 за построение
общего решения

∴ **x-component** :

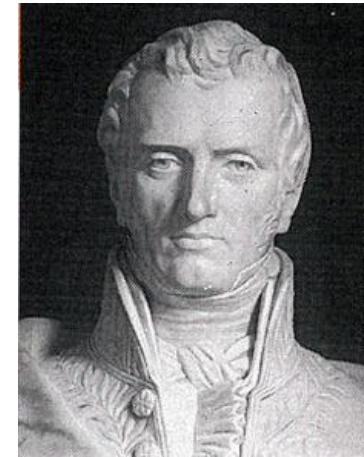
$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

∴ **y-component** :

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right)$$

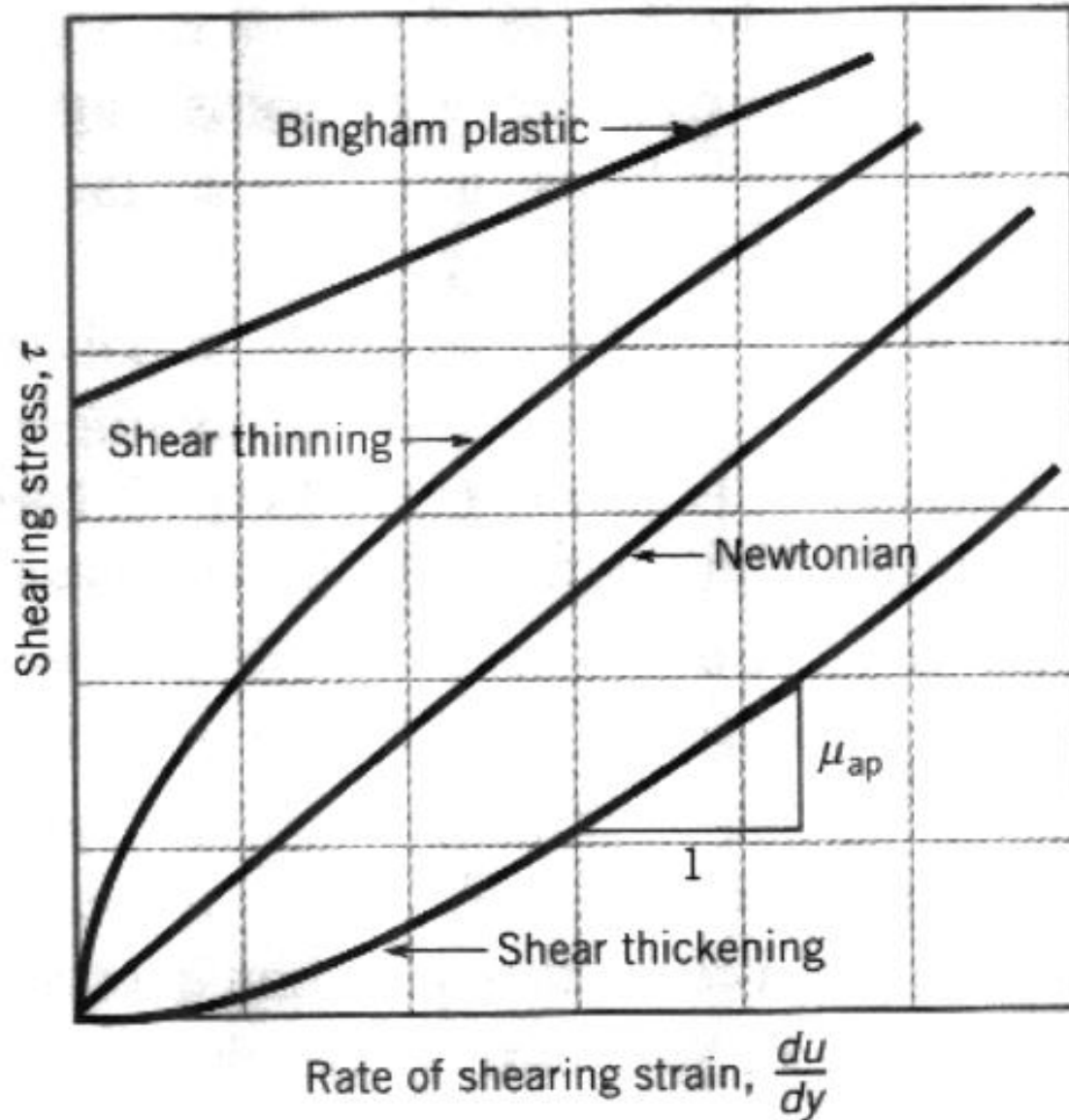
∴ **z-component** :

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$



Claude Louis Marie
Henri Navier

Неньютоновские жидкости



$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

$$\mu = const$$

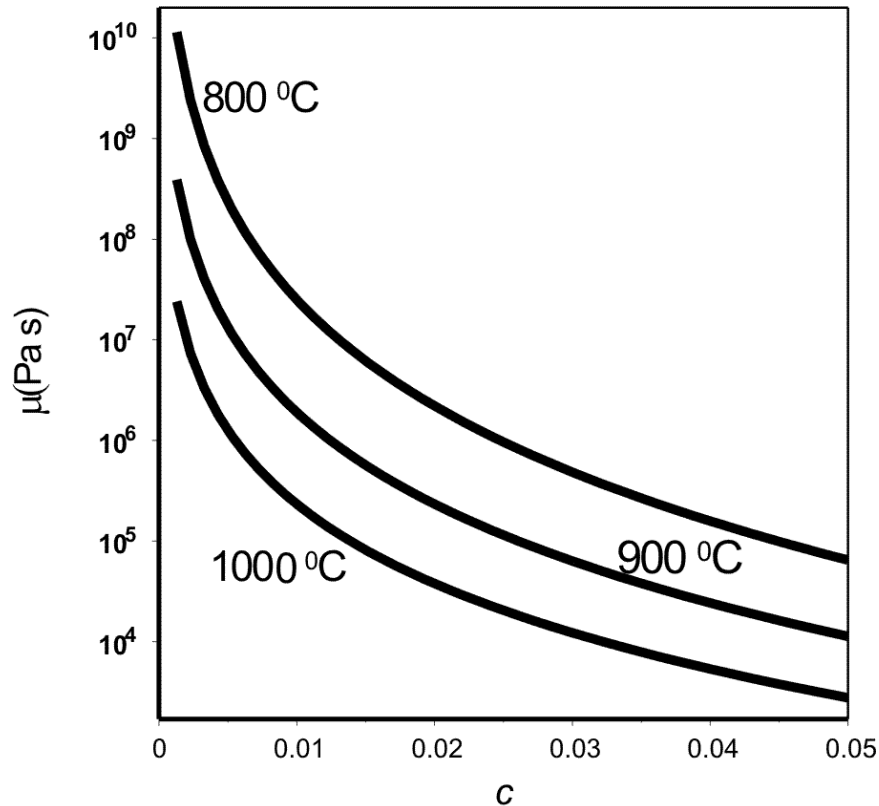
$$\mu = F\left(\frac{dV_x}{dy}, \tau_y, T, X\right)$$

$$\mu = A\left(\frac{dV_x}{dy}\right)^n$$

Реология магмы (расплава)

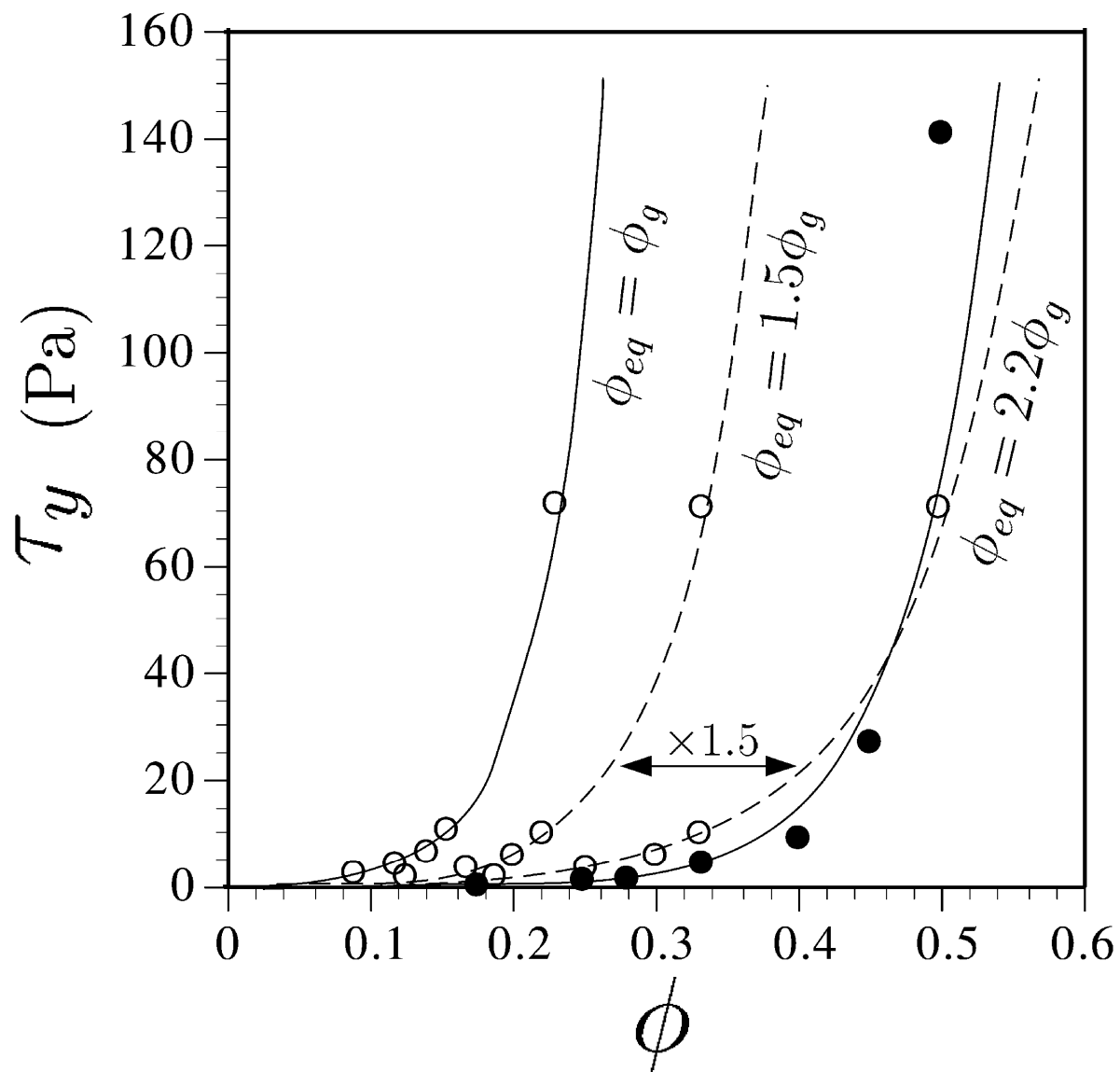
$$\mu = F \left(\frac{dV_x}{dy}, \tau_Y, T, X \right)$$

Hess K-U, Dingwell DB (1996)
Viscosities of hydrous leucogranitic
melts: a non-Arrhenian model. Am
Mineral 81:1297–1300



Сильная зависимость вязкости
расплава от температуры и
концентрации растворенной воды.

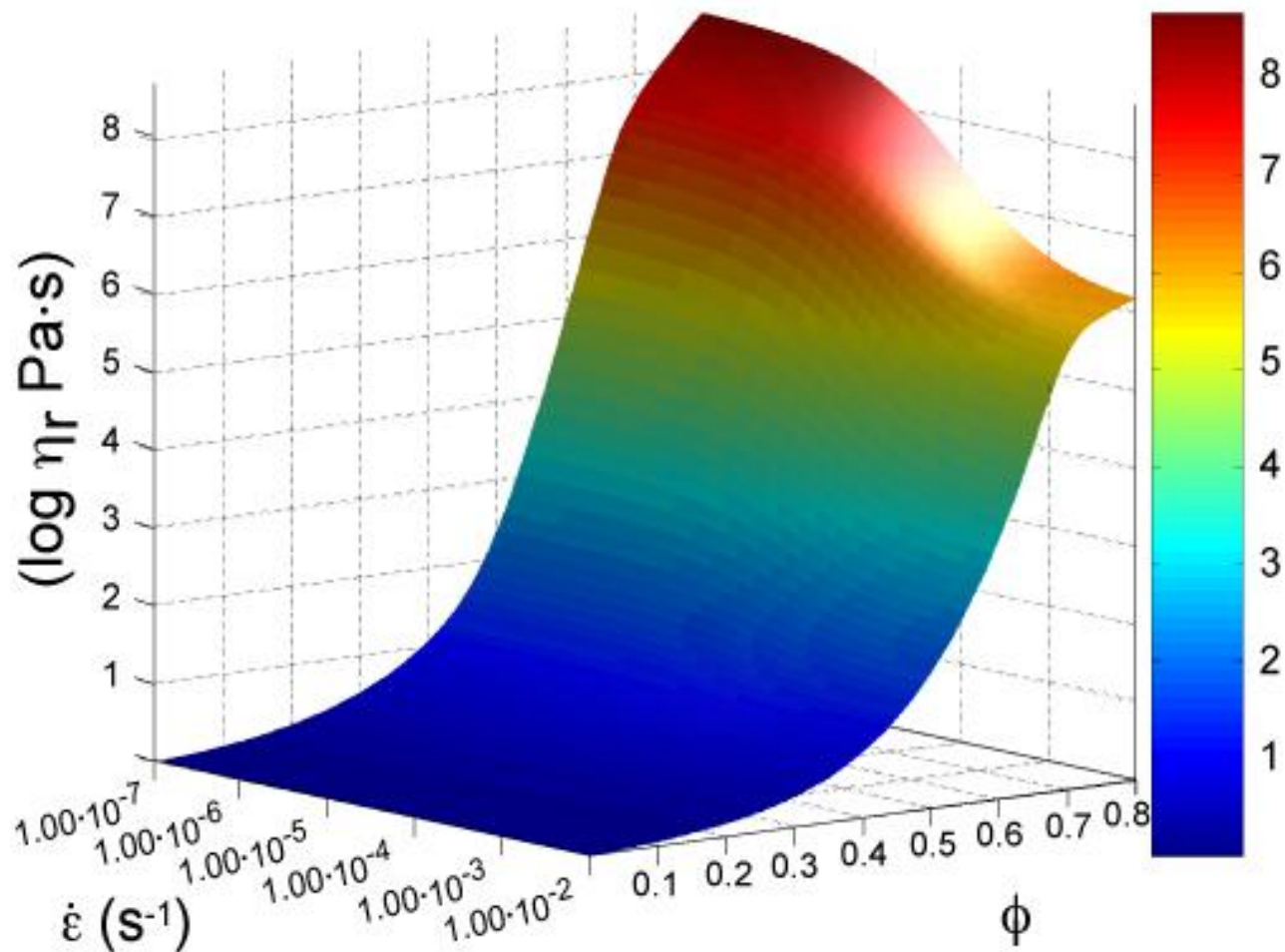
Предел текучести



M.O. Saar et al.
/Earth and Planetary
Science Letters 187
(2001) 367-379

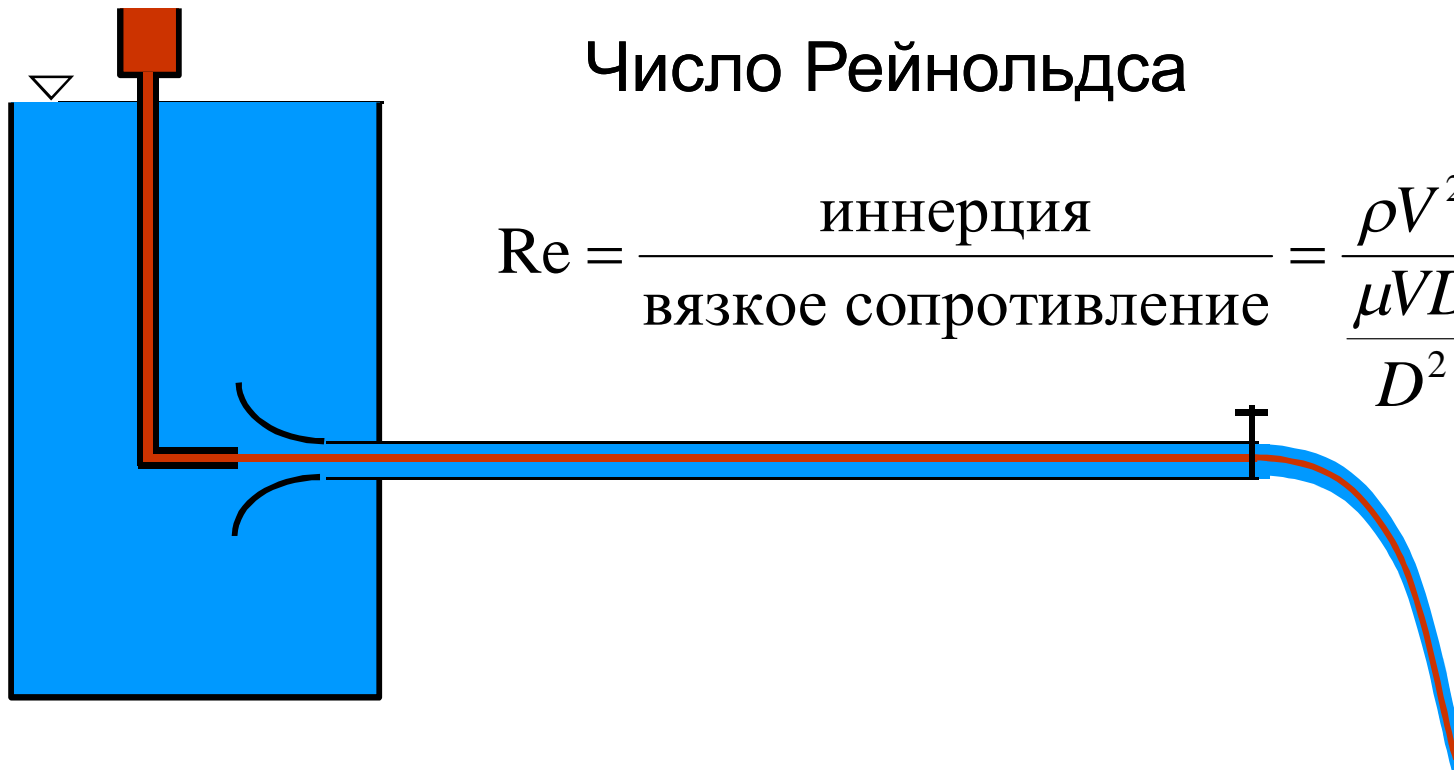
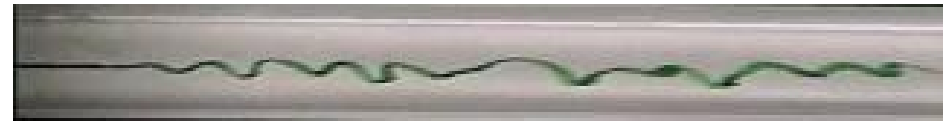
Зависимость от концентрации кристаллов и скорости сдвига

Luca Caricchi, Luigi Burlini, Peter Ulmer, Taras Gerya, Melissa Vassalli and Paolo Papale **Non-Newtonian rheology of crystal-bearing magmas and implications for magma ascent dynamics**



Ламинарные и турбулентные течения

Опыт Рейнольдса



Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\text{иннерция}}{\text{вязкое сопротивление}} = \frac{\rho V^2}{\frac{\mu V D}{D^2}} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Движение магмы в канале

Критическое число Рейнольдса ~ 2000

Канал – 50 м

Вязкость 10^5 Па с

Скорость 1 м/с

Плотность 2500 кг/м³

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{2500 * 1 * 50}{10^5} = 1.25$$

ДВИЖЕНИЕ ЛАМИНАРНО!

Для газозвеси

Канал – 50 м

Вязкость 10^{-5} Па с

Скорость 100 м/с

Плотность 10 кг/м³

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{10 * 100 * 50}{10^{-5}} = 5 \times 10^9$$

ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНО!

Итак:

- Мы узнали, что магма многофазная среда, режим движения которой определяется газосодержанием
- Нашли соответствие типов извержений и режимов течения многофазных сред.
- Вывели страшные уравнения, которые описывают движение жидкости.
- Выяснили от чего зависит вязкость магмы.
- На следующей лекции найдем некоторые полезные решения