

## **Магма как гетерогенная среда .**

- **Физические свойства магм в зависимости от фазового состояния. Режимы течения многофазных сред (гомогенный, пузырьковый, снарядный, дисперсный, пленочный) и их связь с типами извержений.**
- **Основные уравнения механики сплошной среды (уравнения неразрывности и сохранения импульса).**
- **Введение в реологию магмы.**

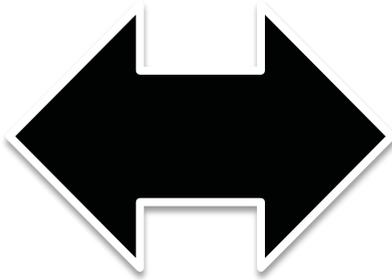
**МЕЛЬНИК ОЛЕГ ЭДУАРДОВИЧ**

**ТЕЛ 939-5476, EMAIL: MELNIK@IMES.MSU.RU**

# Продукты извержений



Лава < 10%



Пемза > 50%

пузырей

# Типы вулканических извержений

## Эксплозивные

На поверхность выходит струя газа с частицами магмы

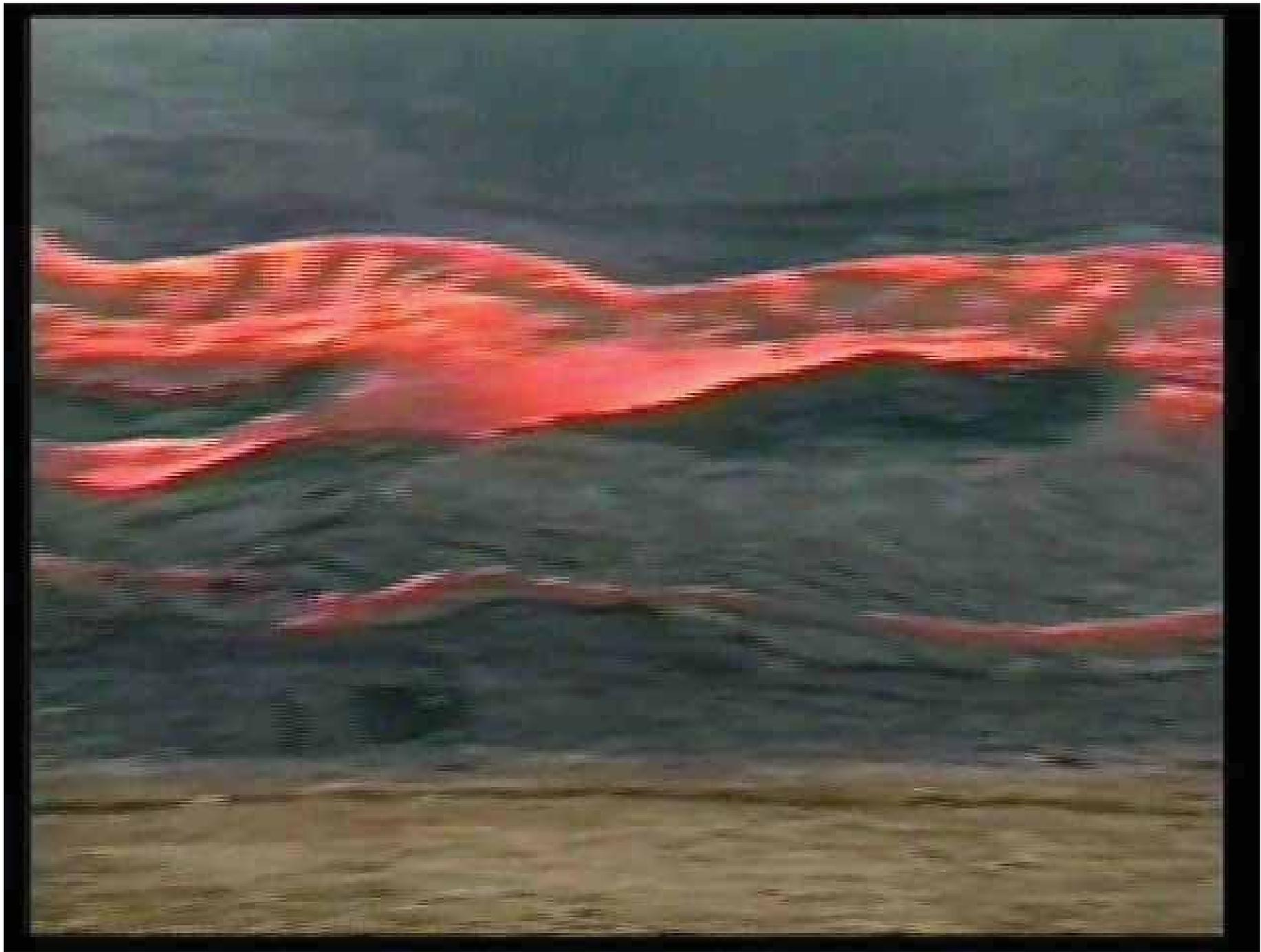


## Экструзивные/Эффузивные

Лава с пузырьками газа









# Схемы режимов извержения

Расход  
 $10^6 - 10^{12}$  кг/с

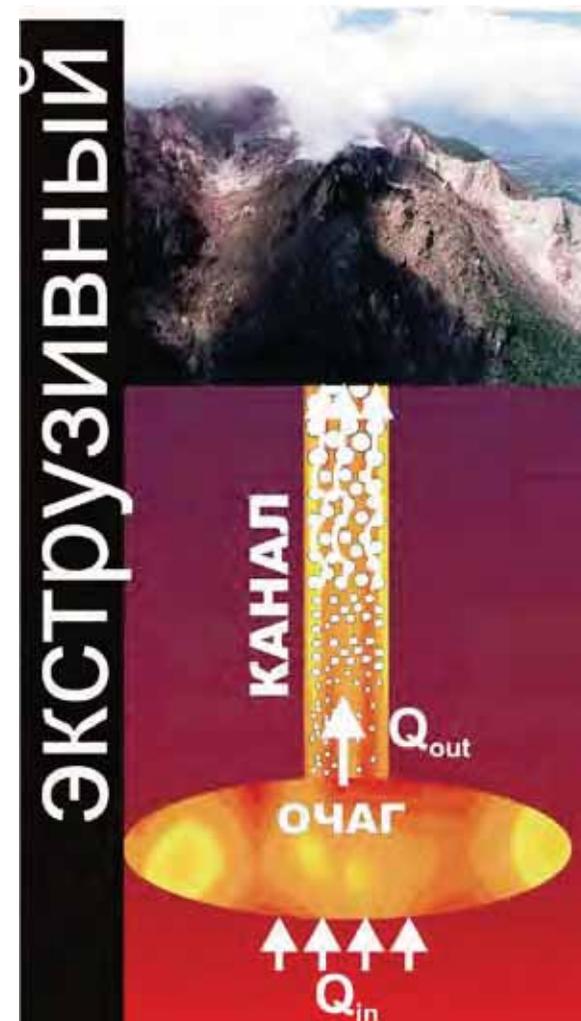
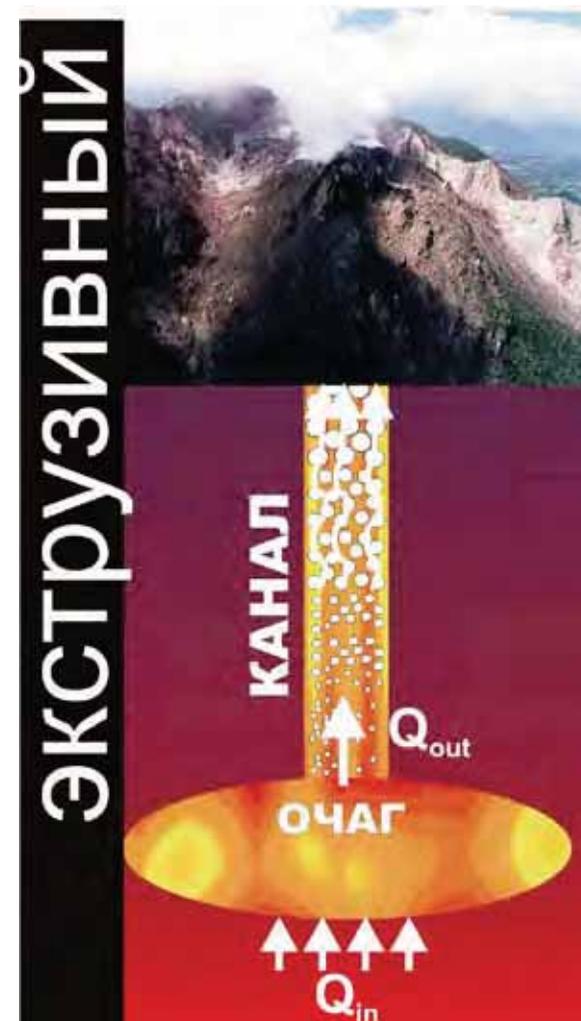


При подъеме магмы из очага в результате падения давления происходит образование и рост пузырьков.

При **эксплозивном** режиме имеет место фрагментация магмы с образованием газозвеси.

При **экструзивном** режиме пузырьки образуют проницаемую пену. Существенен отток газа и кристаллизация магмы.

Расход  
 $10^2 - 10^4$  кг/с



# Эксплозивные извержения

Стромболианские



Короткоживущие 1-2 мин взрывы, вызванные подъемом газового пузыря к жерлу вулкана, высота выброса до нескольких сотен метров

Вулканские



Более продолжительные (до 10-20 мин), характерны для более вязкой магмы, высота выброса до 10 км. Часто приводят к пирокластическим потокам

Плинианские



Мощные, продолжительные (до часов и дней). Высота колонны до 50 км. Приводят к разрушительным последствиям.



# Экструзивные извержения

- Лавовые потоки  
(гавайский тип)

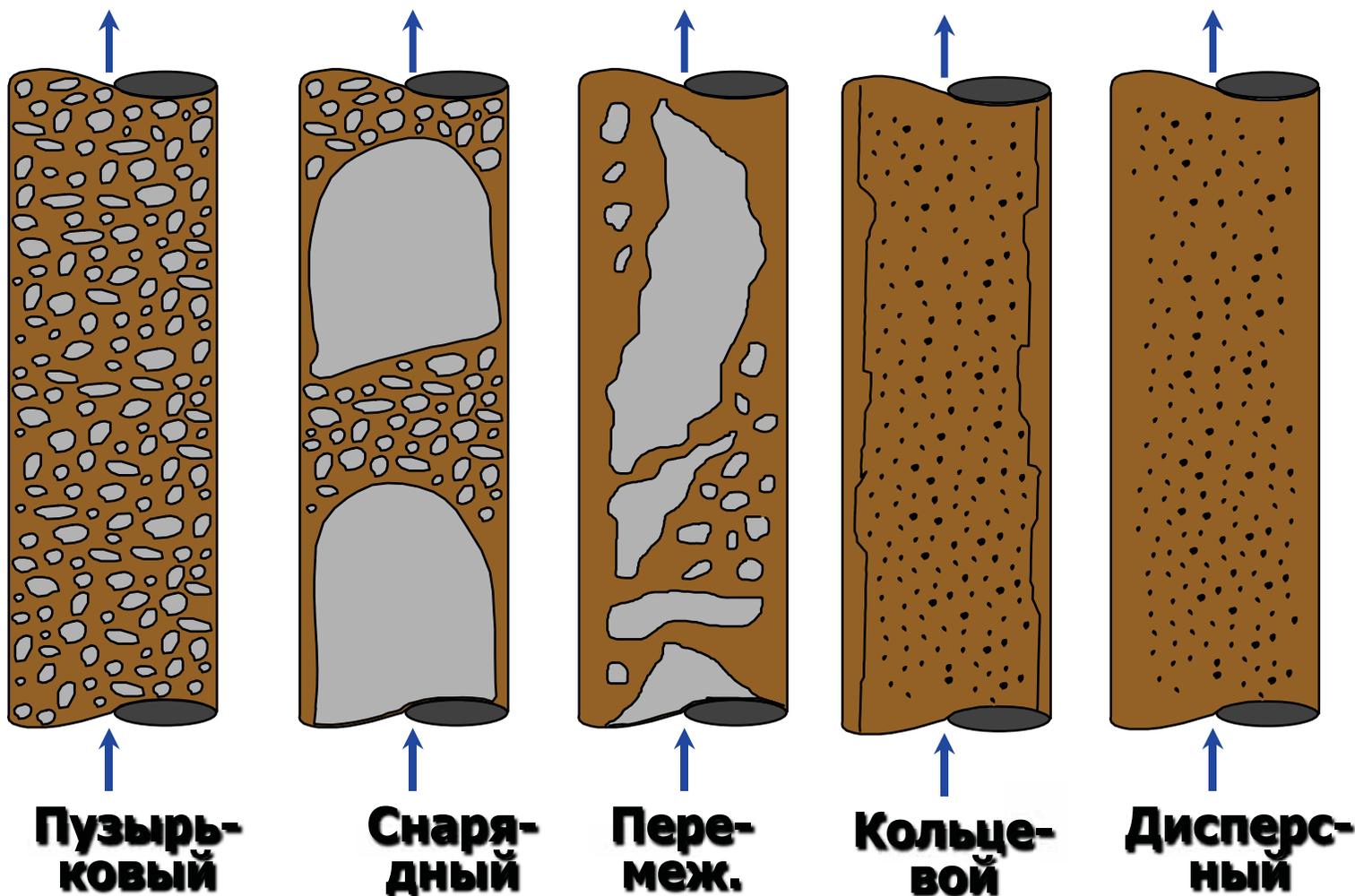


- Лавовые купола  
(пелейский тип)

# Летучие – движущая сила извержений

- При больших давлениях различные газы растворены в магме ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{HCl}$  и др.)
- Магма может содержать до 10 весовых процентов растворенных газов.
- При подъеме и падении давления происходит нуклеация пузырьков и их последующий рост.
- При взрывных извержениях происходит дробление магмы и вынос ее на поверхность газом.

# Режимы течения газожидкостных сред



**Изменение структуры потока по мере роста доли газа**

# Видео отдельных режимов



**1**



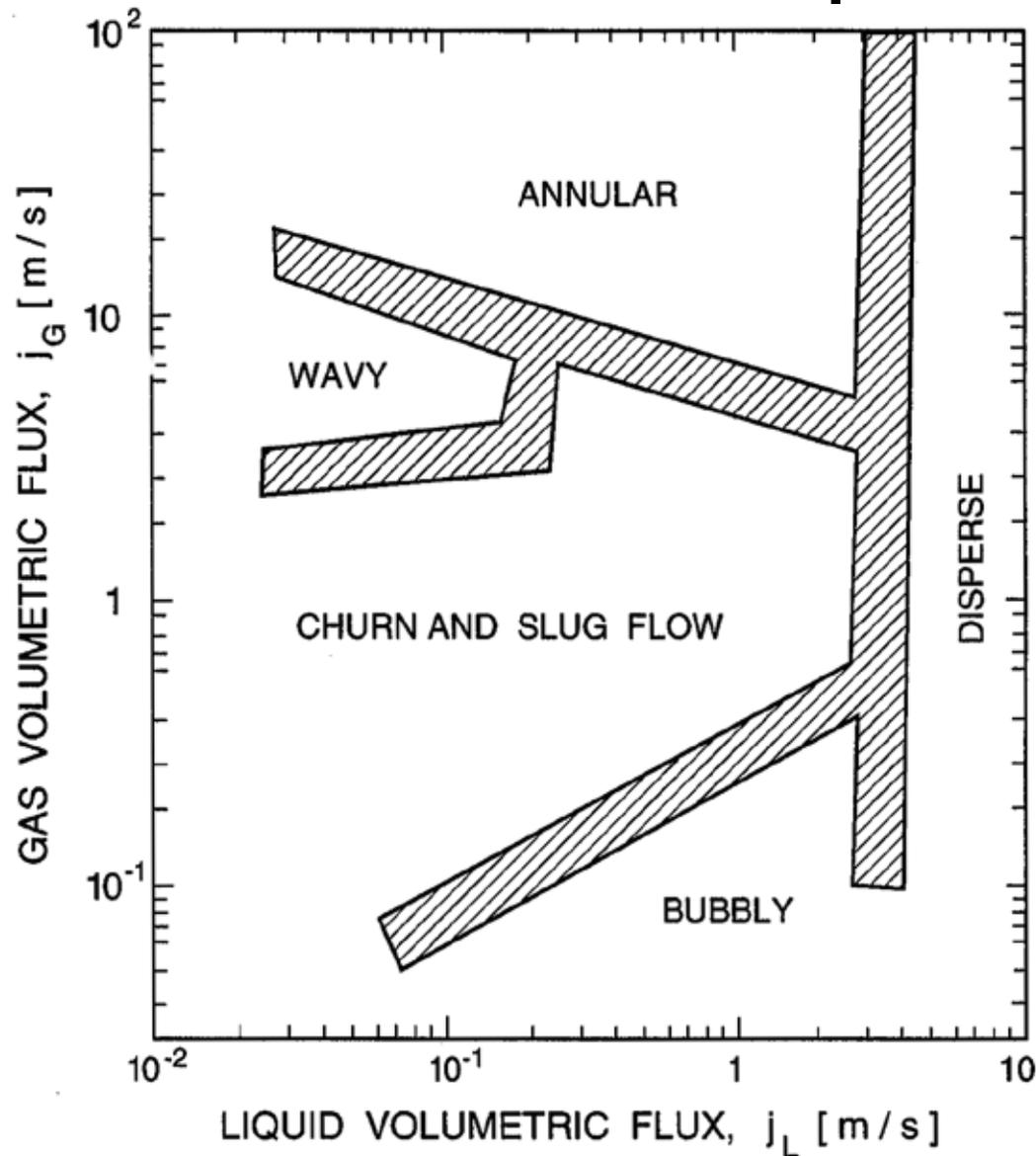
**2**



**3**

1. Пузырьковый
2. Кластерный
3. Снарядный

# От чего зависит режим течения?



- Объемной доли газа
- Вязкости жидкости
- Скорости потока
- Геометрии канала
- Способа диспергирования
- ...

На это осях отложены приведенные объемные потоки фаз.

# Вулканические извержения как многофазные течения

Тип извержения	Режим течения
Гавайский Пелейский	Пузырьковый Кластерный
Стромболианский	Снарядный
Вулканский Плинианский	Дисперсный

НАБЛЮДЕНИЯ  
расход магмы  
сейсмические сигналы  
деформации поверхности  
температура  
высота колонны

ЛАБОРАТОРНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ  
плотность  
вязкость  
термодинамические свойства  
Структура

ПЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ  
условия подъема магмы  
начальный состав  
кинетические процессы

↑ ↑ ↑  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

↓  
**ПРОГНОЗ**

# Уравнения механики сплошной среды

Законы сохранения массы и  
импульса

# Лагранжев и Эйлеров

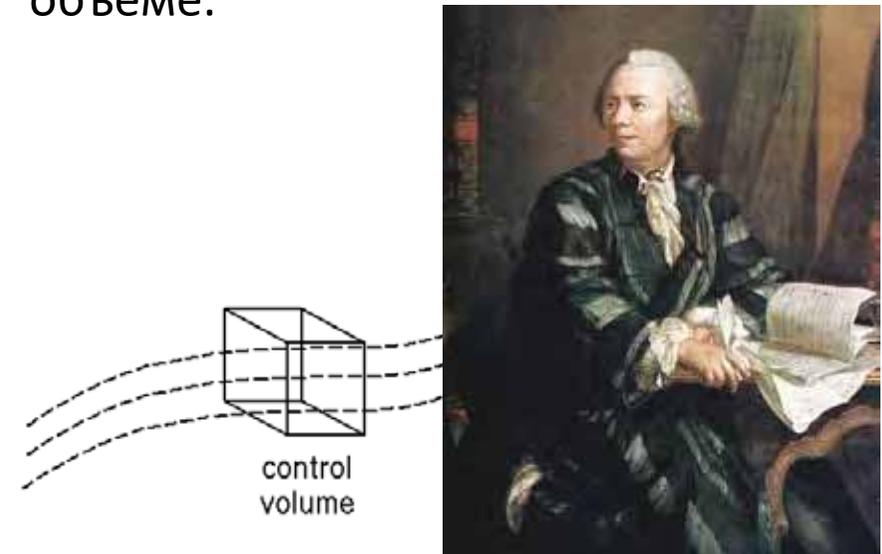
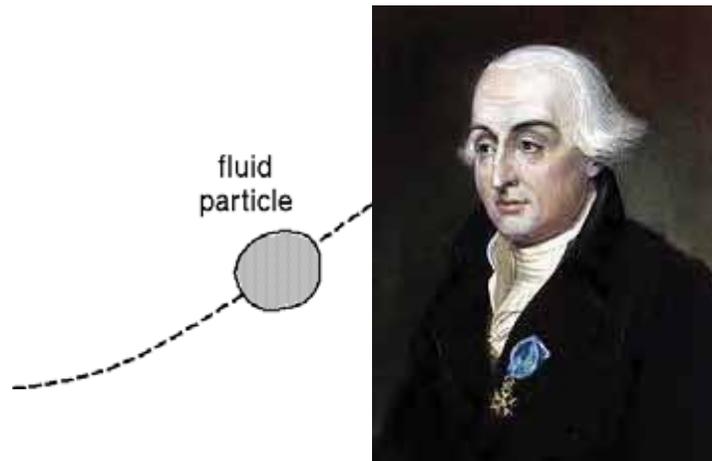
*Joseph Louis Lagrange, [1736-1813](#)*

*Leonhard Euler; [1707 -](#), [1783](#),*

## ПОДХОД

- Поток среды может быть представлен в виде потока жидких частиц, для которых определены масса, импульс, энергия и начальное положение. Законы движения записываются для каждой частицы и смотрятся за ее эволюцией во времени.

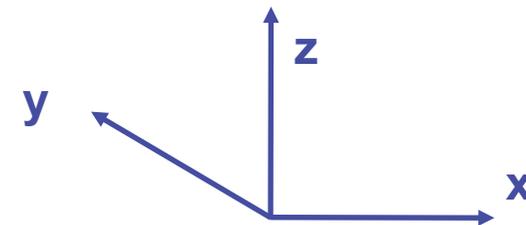
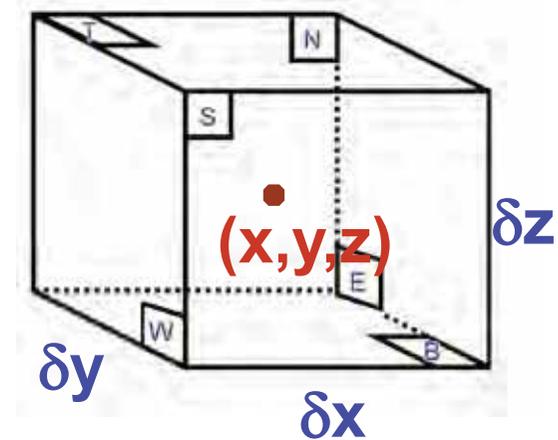
Мы фиксируем элементарный объем сплошной среды с координатами  $(x, y, z)$  и выписываем уравнения для изменения массы, импульса и энергии в этом элементарном объеме.



Данные подходы приводят к одинаковым полям течения, удобство каждого зависит от постановки задачи.

# Свойства элементарного объема

- Мы можем описать жидкость в данном элементе с помощью:
  - Скорости  $u$ .
  - Давления  $p$ .
  - Плотности  $\rho$ .
  - Температуры  $T$ .
  - физических свойств  $\mu$ ,  $C_p$ ,  $\lambda$



# Ряд Тейлора, или как узнать значение функции в соседней точке

- Пусть имеется бесконечное количество раз дифференцируемая функция  $f(x)$
- И мы знаем ее значение в точке  $x$
- Тогда:

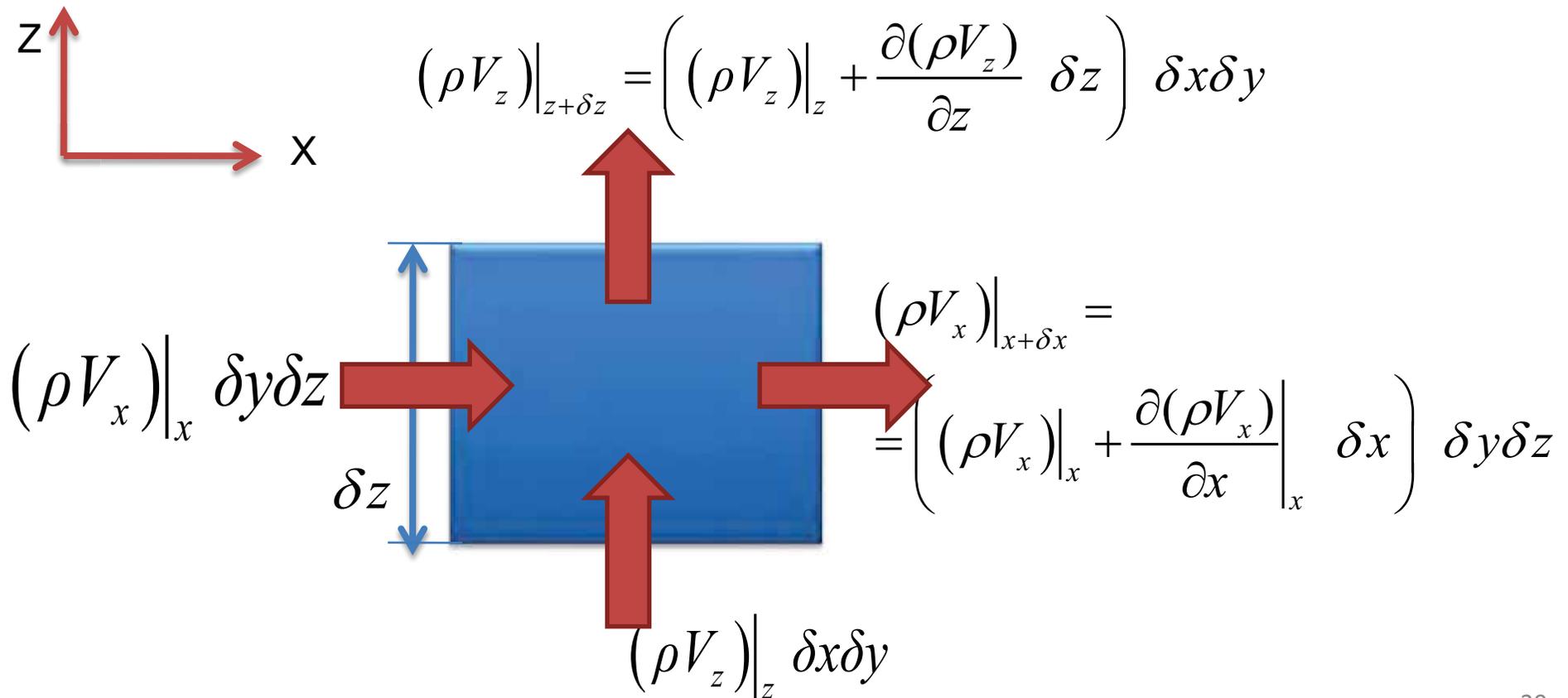


Brook Taylor, [1685](#)—[1731](#)

$$f(x + \delta x) = f(x) + f'(x)\delta x + \frac{f''(x)}{2}(\delta x)^2 + \dots$$

# Закон сохранения массы

- **Изменение массы = приток массы извне**
- Изменение массы =  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z$
- Притоки массы к граням:



# Запишем закон сохранения массы

$$\delta x \delta y \delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[ \left( (\rho V_x) \Big|_x + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} \Big|_x \delta x \right) \delta y \delta z - (\rho V_x) \Big|_x \delta y \delta z \right] + [y] + [z] = 0$$

После суммирования и деления на объем ячейки

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} + [y] + [z] = 0$$

# Разные формы закона сохранения массы

- В общем виде по координатам:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0$$

- Векторный вид:  $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$

- Для несжимаемой жидкости:  $\frac{\partial}{\partial t} \rho = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$

- Или в компонентном виде:  $\frac{\partial(V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(V_z)}{\partial z} = 0$

- Для стационарного движения  $\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$

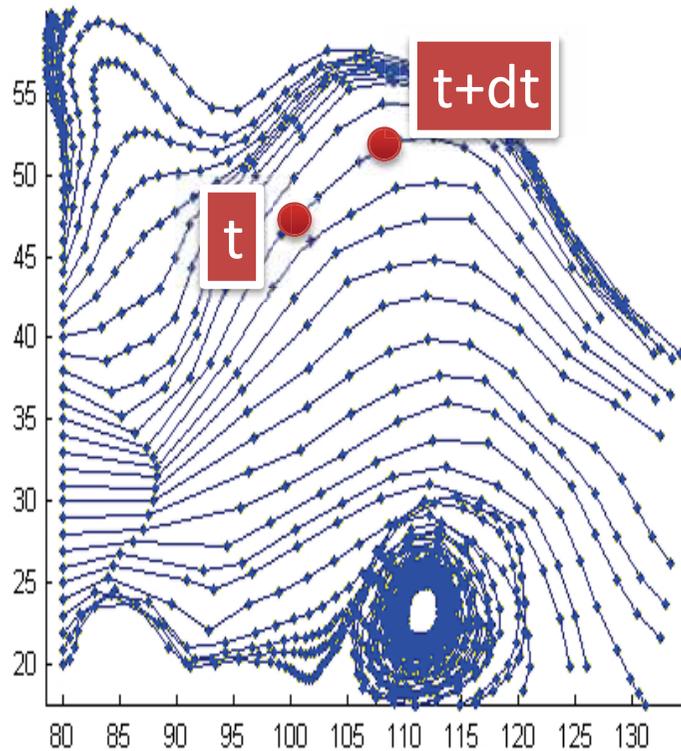
## 2-й закон Ньютона



$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}$$

Ускорение тела пропорционально равнодействующей сил, действующих на него.

## Ускорение жидкой частицы



Пусть в момент  $t$  частица находится в точке  $x, y, z$  и имеет скорость:

$$\vec{V}_{p(t)} = \vec{V}(t, x(t), y(t), z(t))$$

После перемещения частицы она оказалась в точке  $x(t+dt), y(t+dt), z(t+dt)$ .

Скорость в той точке:

$$\vec{V}_{p(t+dt)} = \vec{V}(t + dt, x(t + dt), y(t + dt), z(t + dt))$$

Ускорение

$$\frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\vec{V}_{p(t+dt)} - \vec{V}_{p(t)}}{dt}$$

# Математическое отступление

## Производная сложной функции

- Пусть имеется функция  $F(x(t))$ .
- Найдем ее производную по  $t$ .

$$\frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF(x(t))}{dx} \frac{dx(t)}{dt}$$

# Ускорение

$$\begin{aligned}\vec{a}_p &= \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + \frac{dx_p}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \vec{V} + \frac{dy_p}{dt} \frac{\partial}{\partial y} \vec{V} + \frac{dz_p}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \vec{V} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + V_x \frac{\partial}{\partial x} \vec{V} + V_y \frac{\partial}{\partial y} \vec{V} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \vec{V}\end{aligned}$$

---

$$V_x = \frac{dx_p}{dt}; \quad V_y = \frac{dy_p}{dt}; \quad V_z = \frac{dz_p}{dt}$$

Ускорение частицы (изменение ее скорости) происходит как за счет изменения поля скоростей, так и за счет перемещения в другое место.

# В проекциях на оси координат

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + V_x \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + V_y \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

**3 уравнения!**

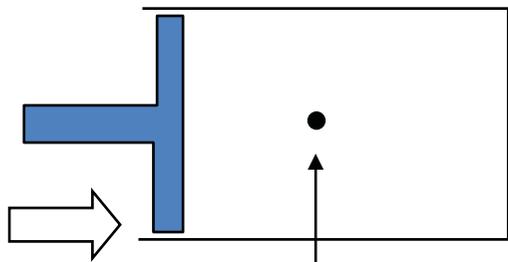
# Физическая интерпретация

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)$$

Полное ускорение

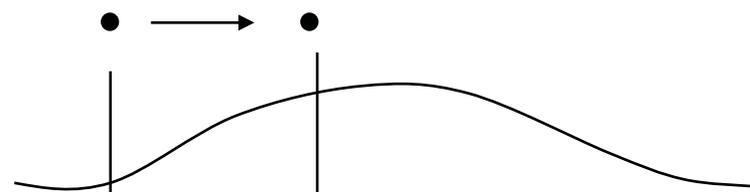
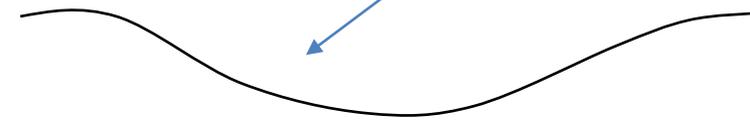
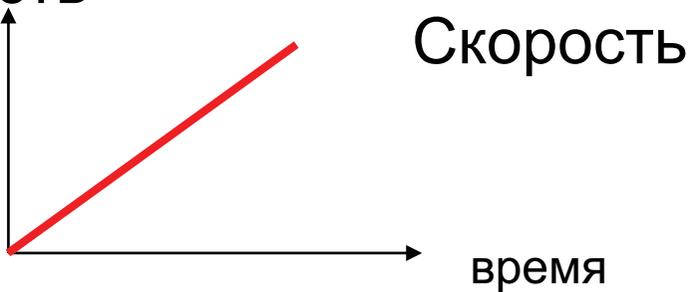
Локальное ускорение

Конвективное ускорение

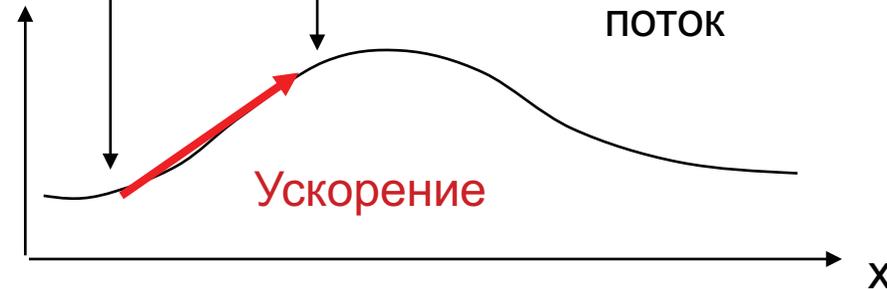


Нестационарный поток

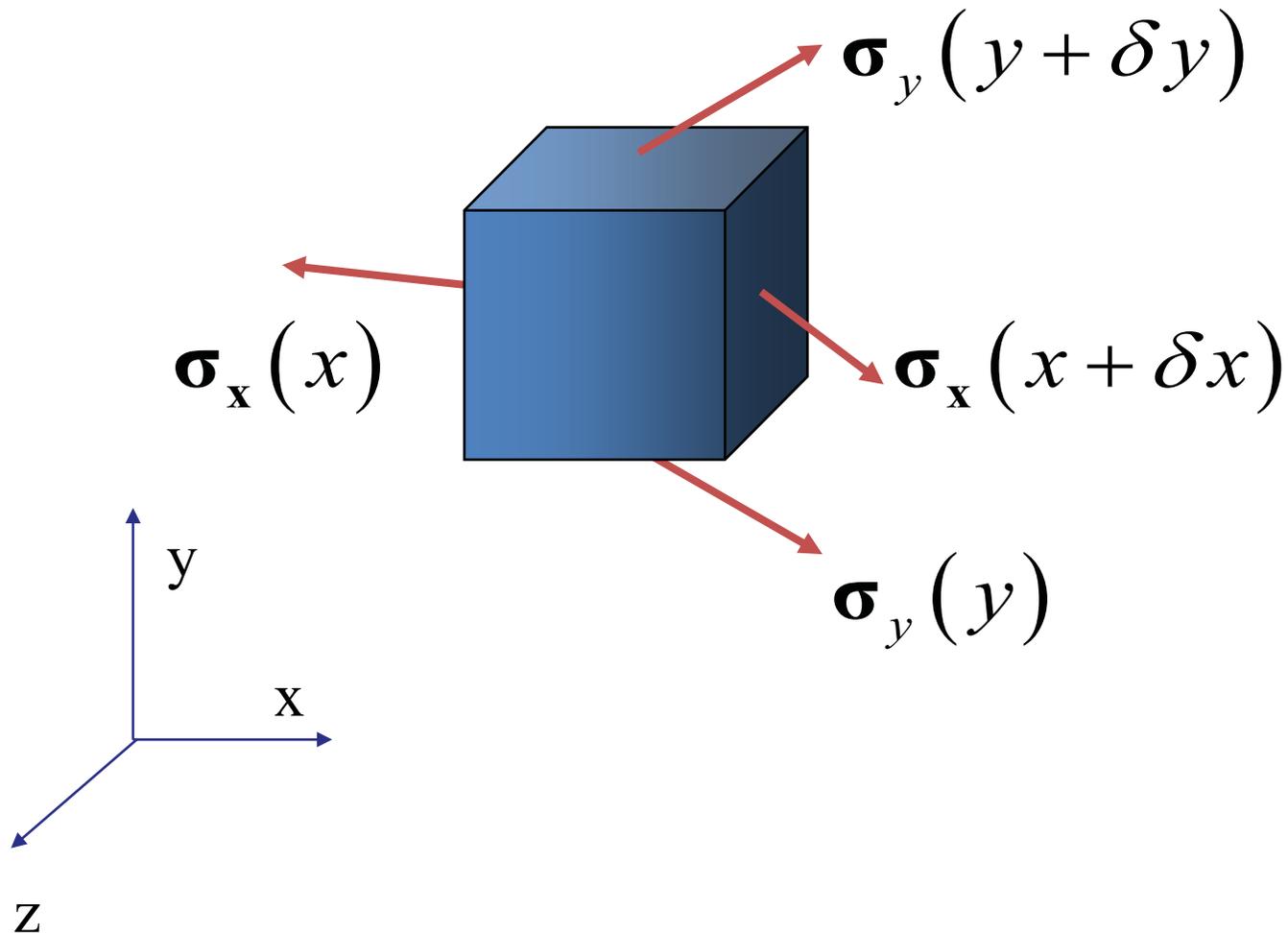
Скорость



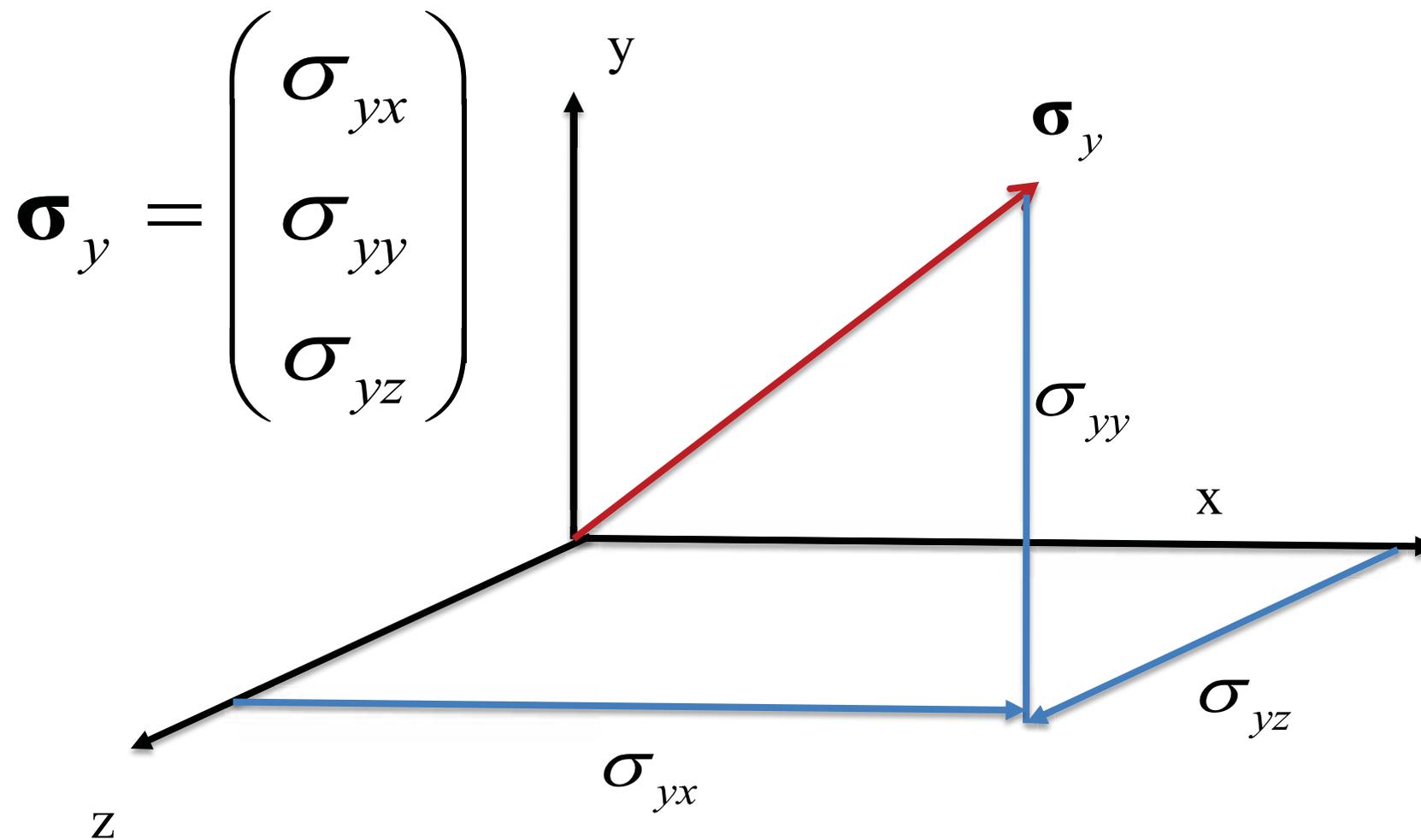
Стационарный поток



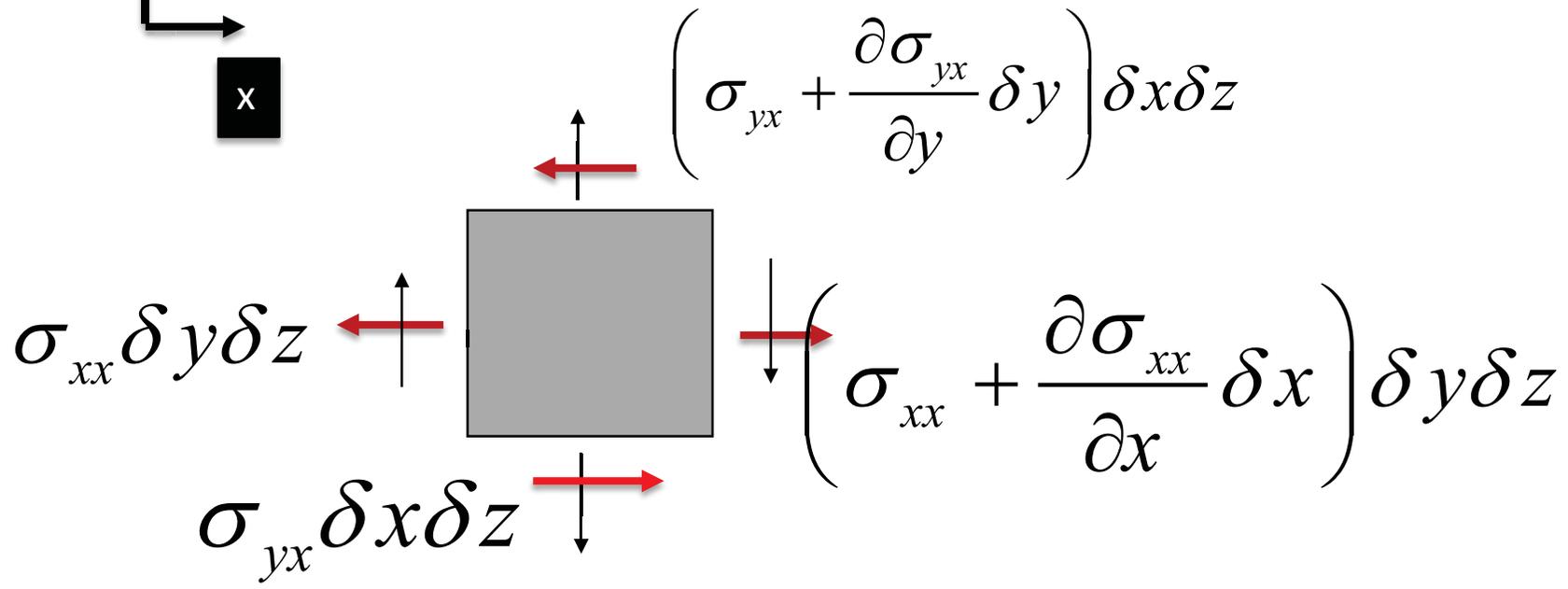
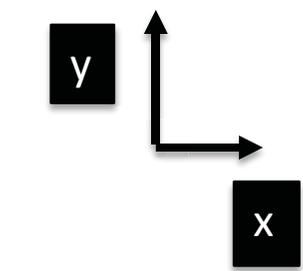
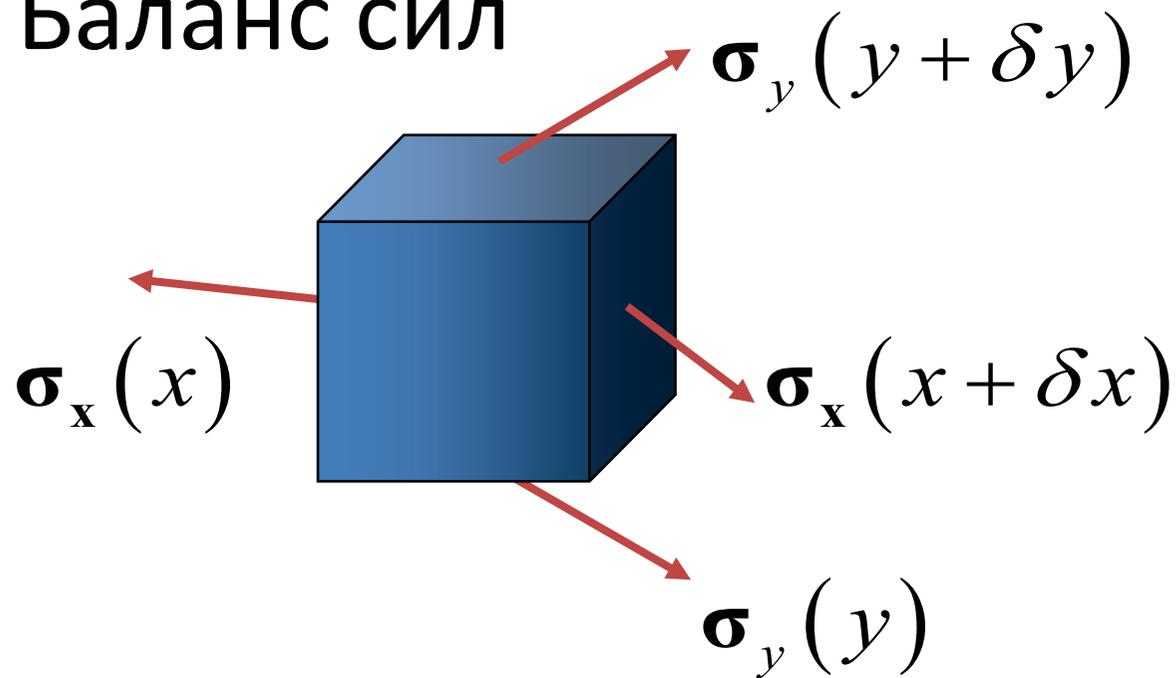
# Силы, действующие на элементарный объем со стороны других объемов



# Проекции силы



# Баланс сил



# 2-й закон Ньютона, проекция на ОСЬ X

$$m \vec{a} \Big|_x = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \Big|_x = \{ \delta \delta V \delta \} \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

В направлении оси x:

$$F_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \rho g_x \delta x \delta y \delta z$$

Нормальное  
напряжение

Сдвиговое напряжение ( $\sigma_{zx}$ :  
напряжение, действующее на  
площадку, перпендикулярную оси  
z в направлении x)

Объемная сила

# 2-й закон Ньютона = уравнение сохранения импульса

Из 2 закона Ньютона:  $m \vec{a}|_x = F_x$

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \rho g_x$$

# Уравнения импульса

∴ **x-component of momentum equation:**

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

∴ **y-component of momentum equation:**

$$\rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y$$

∴ **z-component of momentum equation:**

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z$$

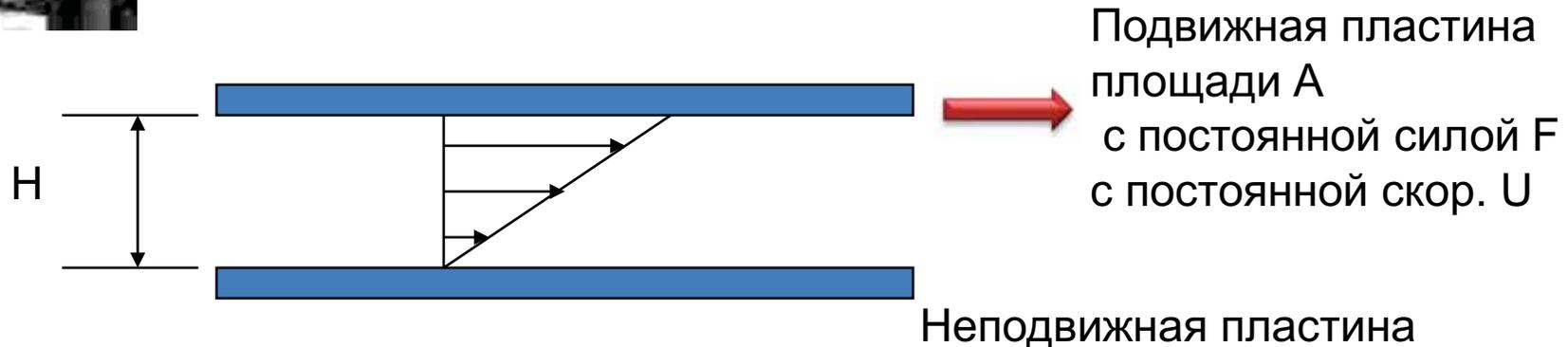
# Реологические соотношения

- Предыдущие уравнения не замкнуты. Они содержат плотность, скорость (3 компоненты) и напряжения (9 компонент)
- Надо выразит напряжения через скорости или что-нибудь еще.
- Обычно нормальные напряжения обозначают  $\sigma$ , а касательные -  $\tau$



Maurice Couette  
1858-1943

# Вязкая жидкость Опыт Куэтта



Из эксперимента,  $F \sim A(U/H) = A(dV/dy)$

$$\sigma_{yx} = \tau_{yx} = \frac{F}{A} \sim \text{сдвиговое напряжение}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV}{dy}, \quad \mu \text{ ВЯЗКОСТЬ}$$

# Связь между напряжениями и деформациями

При одномерном движении:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

В общем случае:

(сдвиговое напряжение) = (вязкость) × (скорость деформации)

➤ В декартовых координатах, в трехмерном случае:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

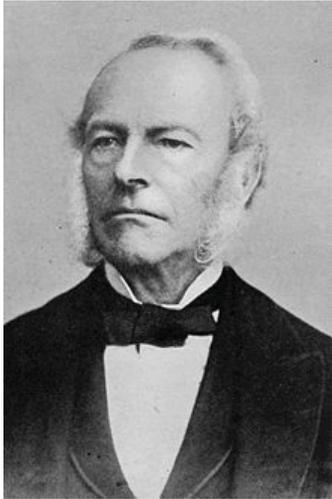
$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)$$



Sir George Gabriel  
Stokes

# Уравнения Навье -Стокса (1822)

\$1,000,000 за построение  
общего решения

∴ **x-component** :

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right)$$

∴ **y-component** :

$$\rho \left( \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right)$$

∴ **z-component** :

$$\rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right)$$



Claude Louis Marie  
Henri Navier

# Давление

Рассмотрим покоящуюся жидкость в поле силы тяжести:

Направим ось  $z$  вертикально вниз, давление на поверхности жидкости равно атмосферному.

От всех уравнений Навье –Стокса останется:

$$\frac{dp}{dz} = \rho g \Rightarrow p = p_a + \rho g z$$

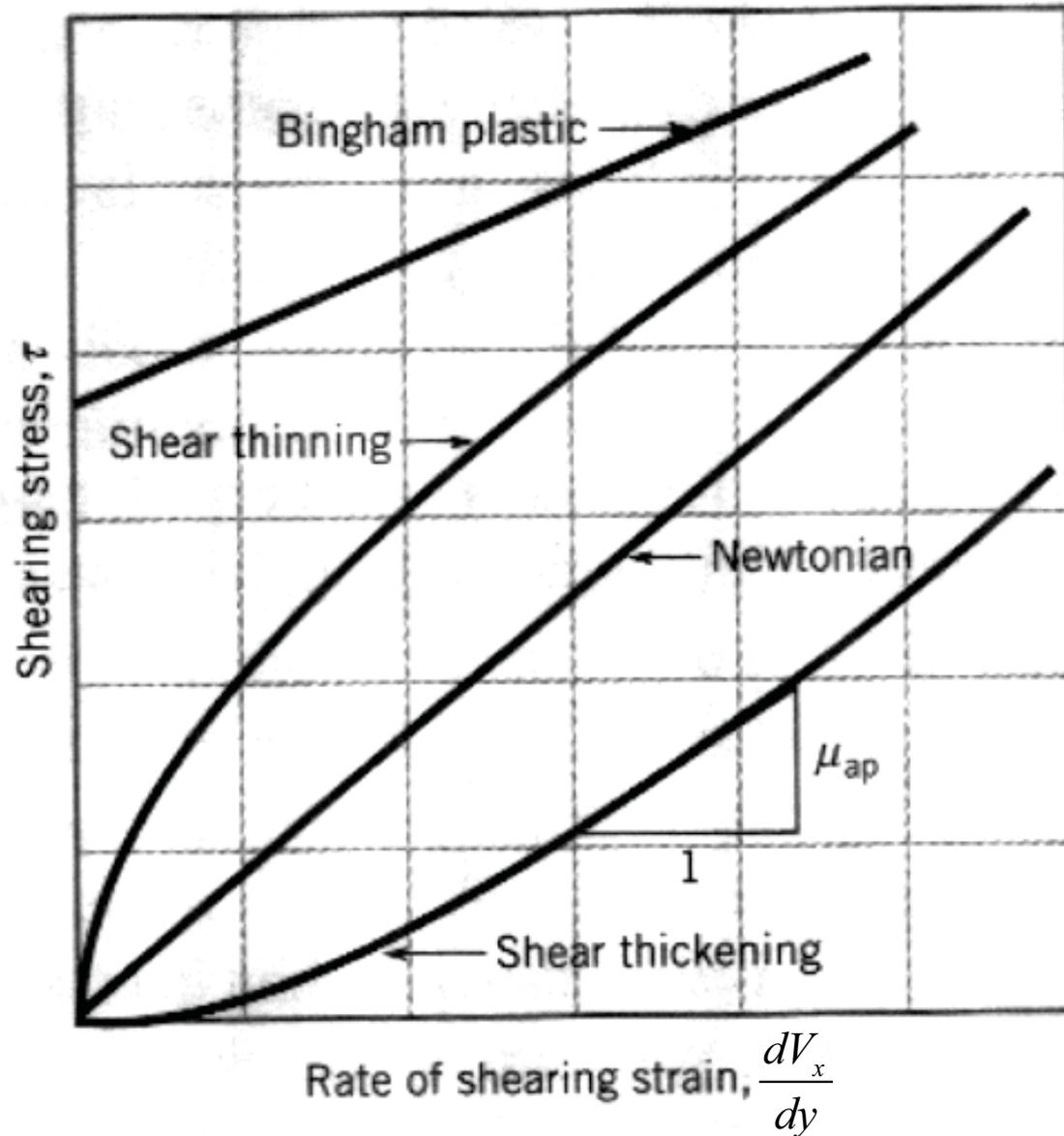


Blaise Pascal

17th century



# Неньютоновские жидкости



$$\tau_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy}$$

$$\mu = const$$

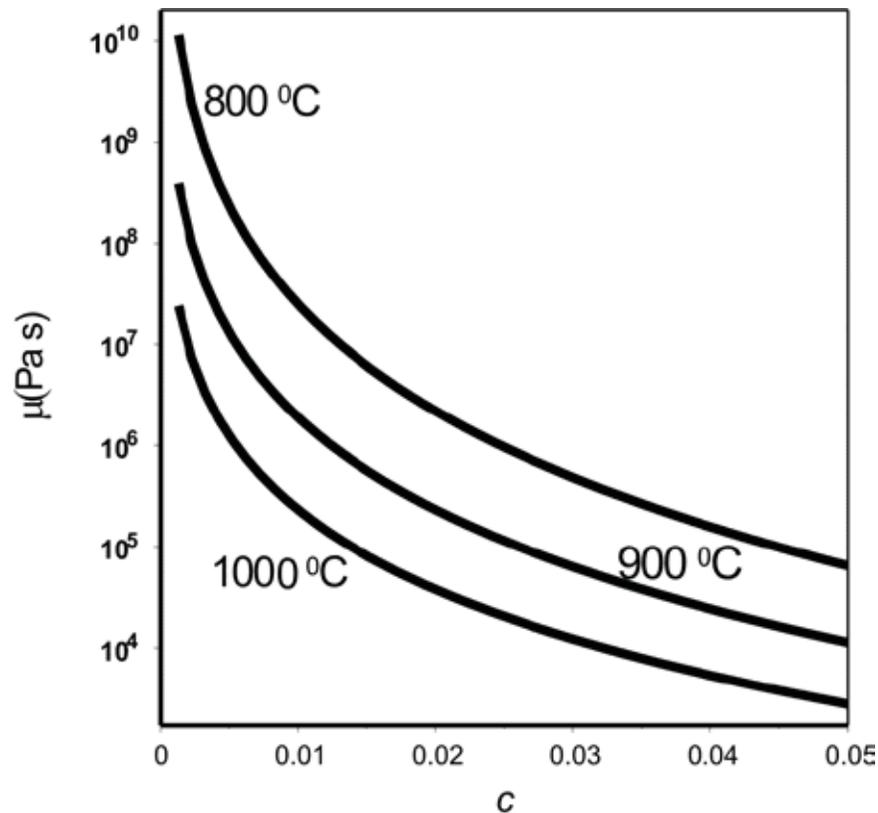
$$\mu = F \left( \frac{dV_x}{dy}, \tau_Y, T, X \right)$$

$$\mu = A \left( \frac{dV_x}{dy} \right)^n$$

# Реология магмы (расплава)

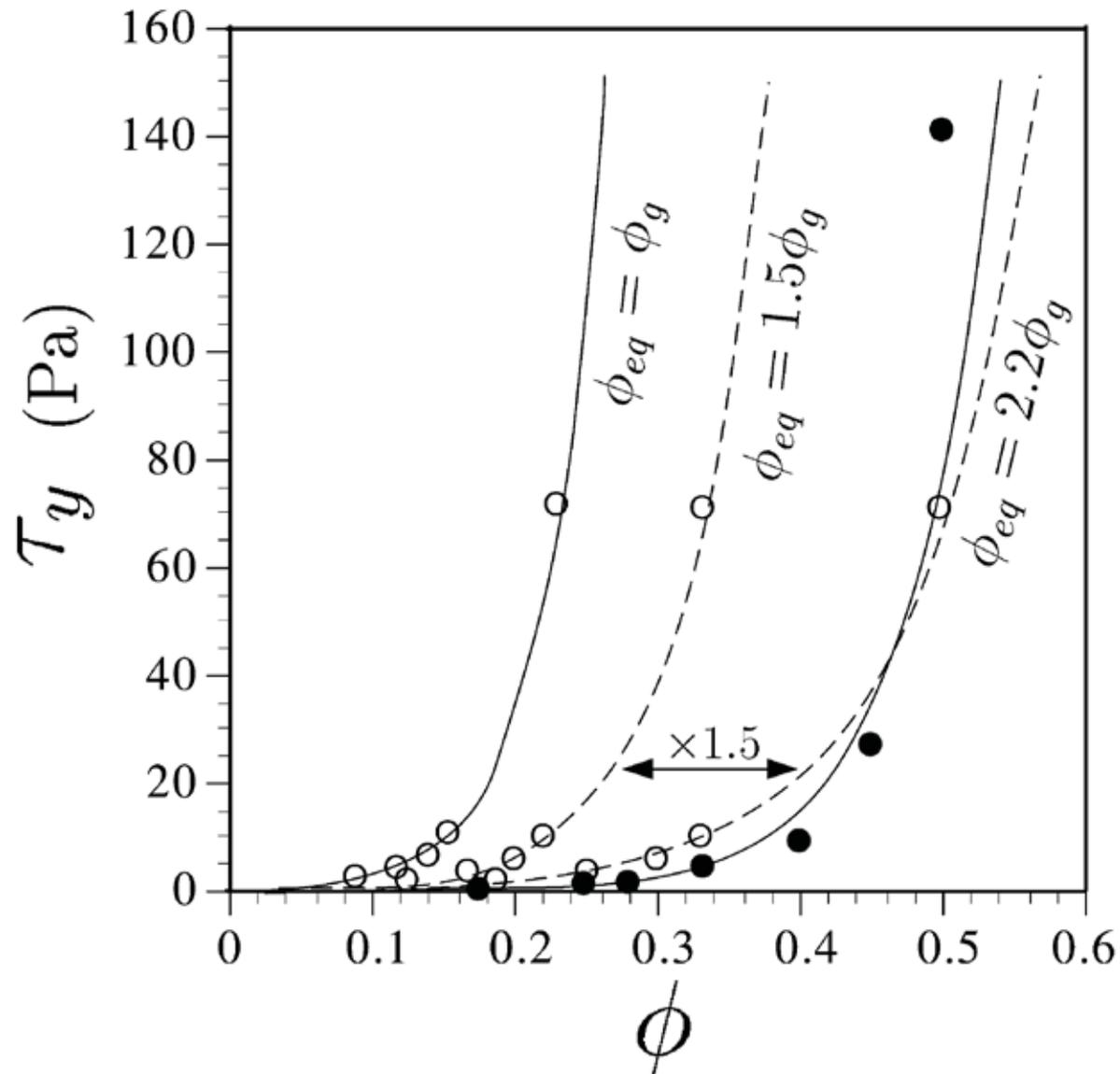
$$\mu = F \left( \frac{dV_x}{dy}, \tau_Y, T, X \right)$$

Hess K-U, Dingwell DB (1996)  
Viscosities of hydrous leucogranitic  
melts: a non-Arrhenian model. Am  
Mineral 81:1297–1300



Сильная зависимость вязкости  
расплава от температуры и  
концентрации растворенной воды.

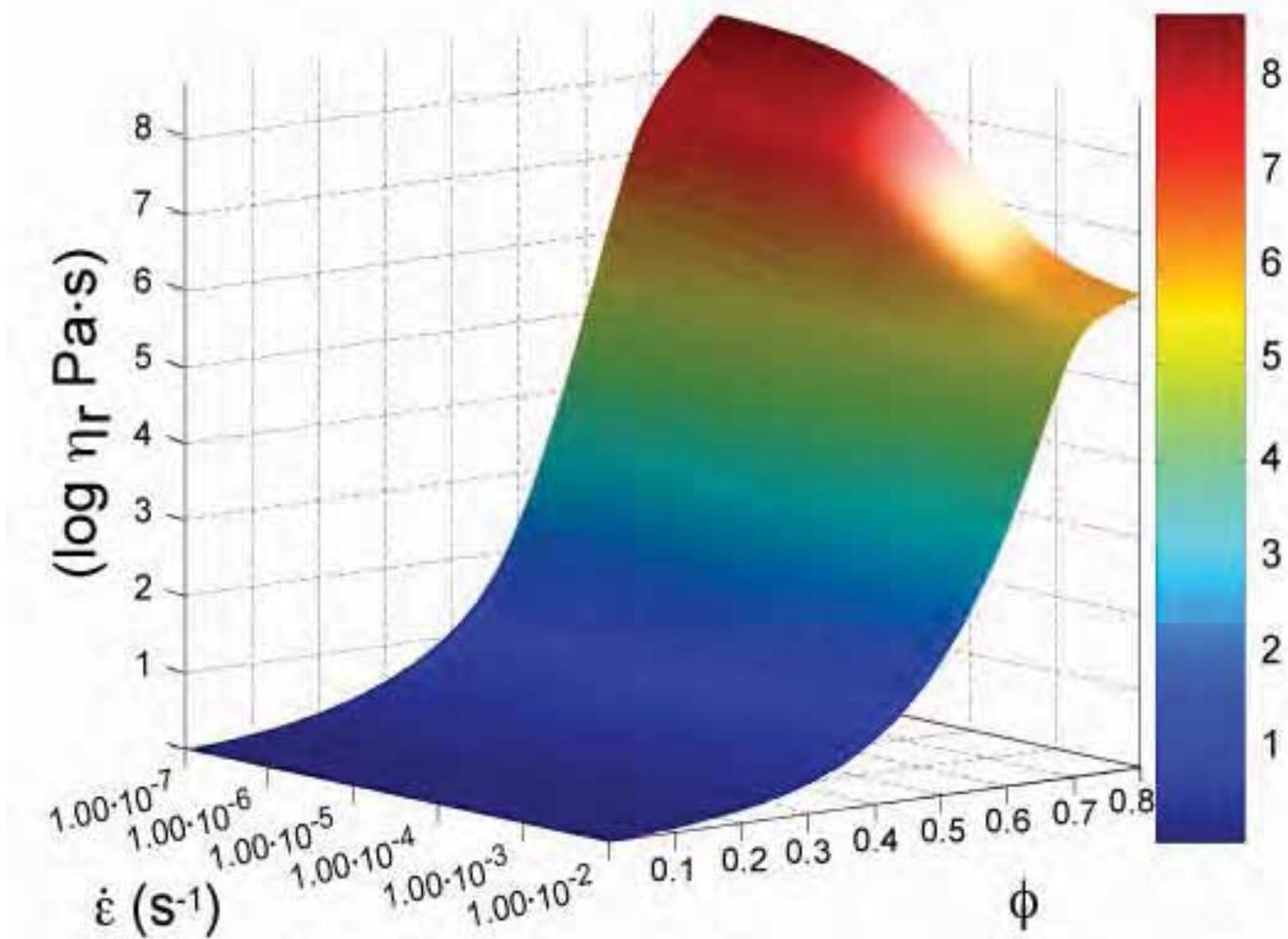
# Предел текучести



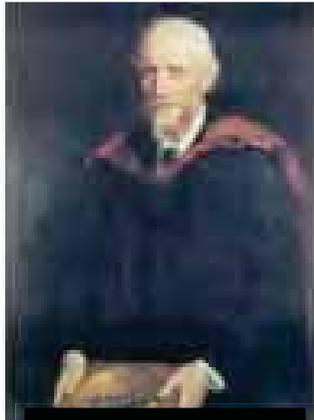
M.O. Saar et al.  
/Earth and Planetary  
Science Letters 187  
(2001) 367-379

# Зависимость от концентрации кристаллов и скорости сдвига

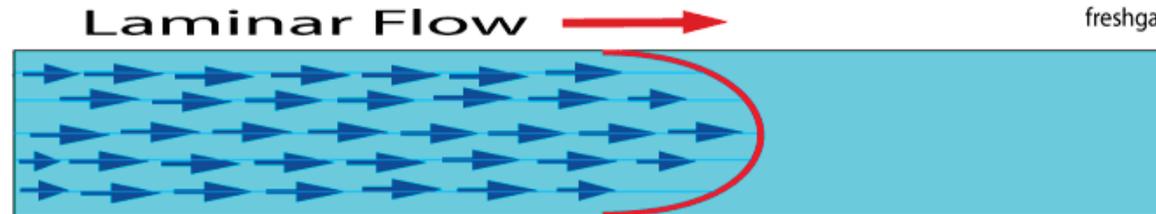
Luca Caricchi, Luigi Burlini, Peter Ulmer, Taras Gerya, Melissa Vassalli and Paolo Papale **Non-Newtonian rheology of crystal-bearing magmas and implications for magma ascent dynamics**



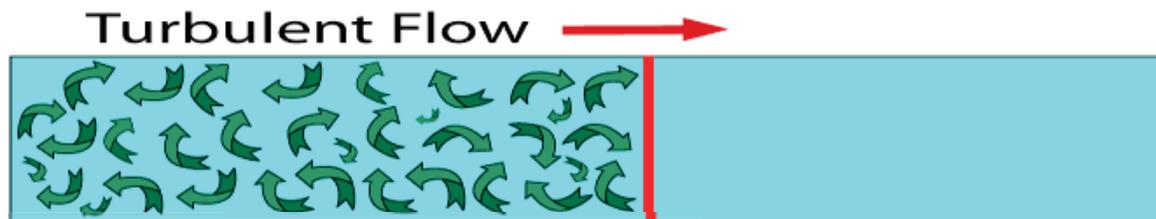
# Ламинарные и турбулентные течения



Osborne Reynolds  
(1842 - 1912)

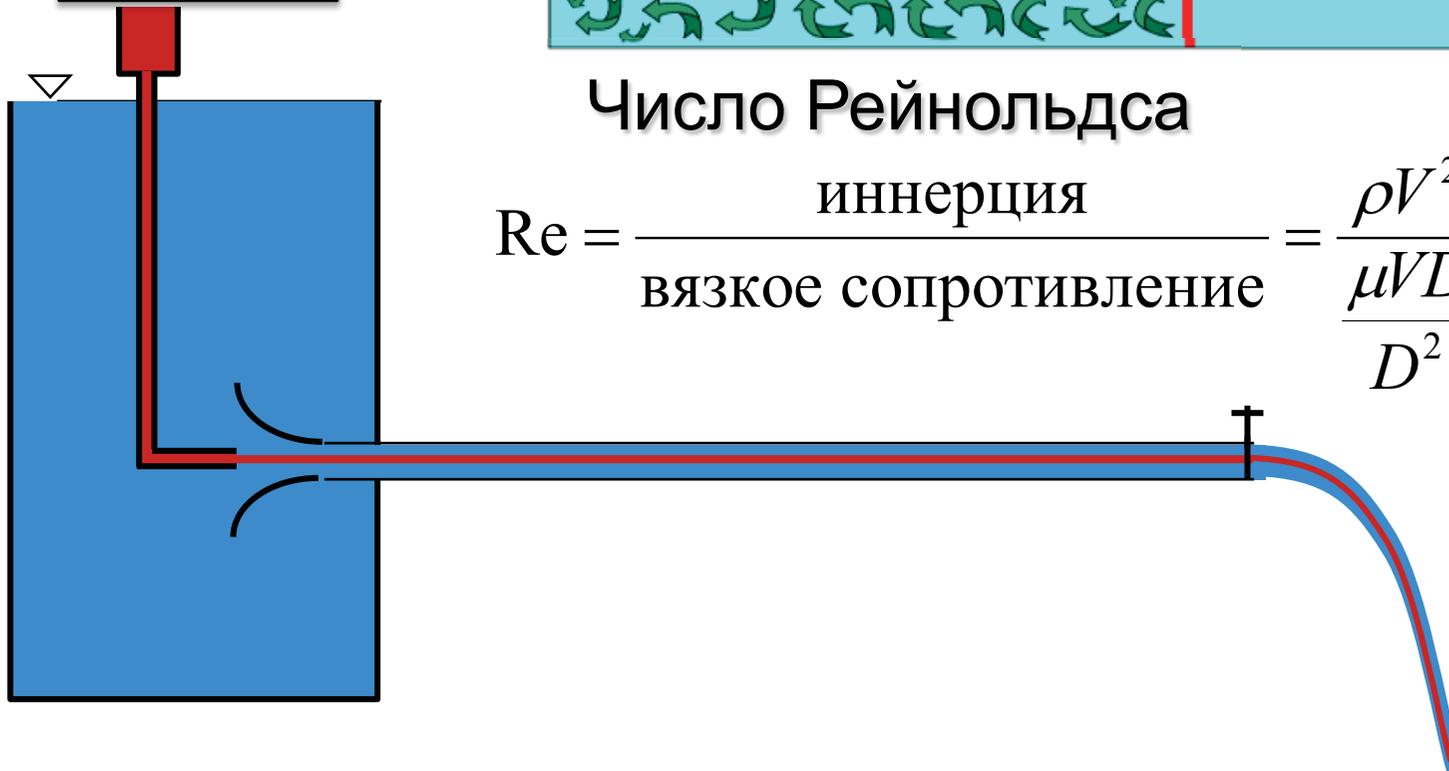


freshgasflow.com



Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\text{иннерция}}{\text{вязкое сопротивление}} = \frac{\rho V^2}{\frac{\mu V D}{D^2}} = \frac{\rho V D}{\mu}$$



# Движение магмы в канале

Критическое число Рейнольдса ~ 2000

Канал – 50 м

Вязкость  $10^5$  Па с

Скорость 1 м/с

Плотность 2500 кг/м<sup>3</sup>

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{2500 * 1 * 50}{10^5} = 1.25$$

**ДВИЖЕНИЕ ЛАМИНАРНО!**

Для газозвеси

Канал – 50 м

Вязкость  $10^{-5}$  Па с

Скорость 100 м/с

Плотность 10 кг/м<sup>3</sup>

$$Re = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{10 * 100 * 50}{10^{-5}} = 5 \times 10^9$$

**ДВИЖЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНО!**

## Итак:

- Мы узнали, что магма многофазная среда, режим движения которой определяется газосодержанием
- Нашли соответствие типов извержений и режимов течения многофазных сред.
- Вывели страшные уравнения, которые описывают движение жидкости.
- Выяснили от чего зависит вязкость магмы.
- На следующей лекции найдем некоторые полезные решения